

SÉRIE A, N° 3267
N° D'ORDRE 4139

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Jean GEFROY

1^{re} THÈSE

CONTRIBUTION

A LA THÉORIE DES VALEURS EXTRÊMES

2^{me} THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 17 Décembre 1958 devant la Commission d'examen

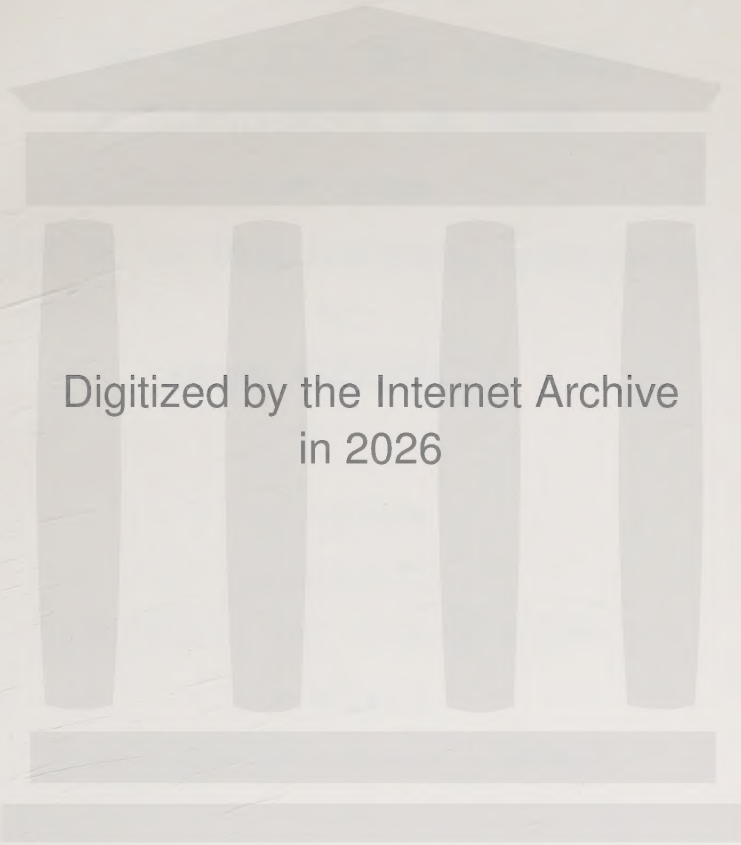
MM. **G. DARMOIS**

D. DUGUÉ

Madame **DUBREIL**

Président

Examineurs



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552210_0009

SÉRIE A, N° 3267
N° D'ORDRE 4139

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Jean GEFROY

1^{re} THÈSE

CONTRIBUTION

A LA THÉORIE DES VALEURS EXTRÊMES

2^{me} THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 17 Décembre 1958 devant la Commission d'examen

MM. **G. DARMOIS**

Président

D. DUGUÉ

Madame **DUBREIL**

Examineurs



INTRODUCTION

Le point de départ des recherches dont nous exposons ci-après les résultats fut l'étude de la convergence en probabilité du milieu d'un échantillon. On savait que, pour certaines lois, cette variable aléatoire converge en probabilité vers une limite certaine quand la taille de l'échantillon croît indéfiniment. La première question que nous avons abordée fut de caractériser les lois des échantillons pour lesquelles ce phénomène se produit. Il était naturel d'essayer, en plus, de préciser le mode de convergence envisagé : peut-il s'agir d'une convergence presque sûre, ou même presque complète ?

Avant de pouvoir répondre - au moins partiellement - à ces questions, nous fûmes contraint à un assez long détour. Afin d'établir que la stabilité en probabilité ou presque complète du milieu exige la stabilité similaire des deux valeurs extrêmes, nous dûmes préciser un peu l'indépendance limite de ces deux variables. Quant à l'étude de la stabilité des valeurs extrêmes, elle fut beaucoup simplifiée par une étude préalable de diverses majorations et minoration asymptotiques des valeurs extrêmes par des suites certaines.

L'étude de la stabilité en probabilité de la plus grande valeur d'un échantillon a été faite par Gnedenko en 1943. Nous avons en quelque sorte complété son étude en nous intéressant aux valeurs de rang fixe à partir des extrêmes, et aux intervalles qui séparent ces variables (nous les appelons les mailles extrêmes).

Sur les stabilités presque complète et presque sûre des valeurs extrêmes, qui font l'objet des chapitres 3 et 4 de notre travail, il n'y a - du moins le croyons-nous - aucun résultat antérieur aux nôtres.

Les deux derniers chapitres sont consacrés à des questions assez différentes. Il nous a semblé intéressant d'exposer les méthodes de Gnedenko et Khintchine pour obtenir les formes limites de la loi de la plus grande valeur d'un échantillon, et de montrer comment elles se généralisent au cas de plusieurs dimensions.

Nous avons appris tout récemment qu'un mathématicien portugais, M. J. Tiago de Oliveira, venait de faire une étude détaillée de ce problème, mais nous ne connaissons pas encore ses résultats.

Au chapitre 7, nous donnons quelques propriétés des échantillons de points à deux dimensions liées à la Théorie des valeurs extrêmes ; en particulier l'amorce d'une étude du "polygone d'appui" d'un tel échantillon, entreprise sur le conseil de M. G. Darmois. Il est hors de doute que cette notion mérite un examen plus approfondi.

Je remercie très vivement M. Darmois de ses précieuses suggestions, et de l'intérêt qu'il a bien voulu manifester pour nos recherches. Je dois une très grande reconnaissance à M. Dugué, qui nous fournit le sujet du présent travail et le dirigea avec une bienveillance inlassable que nous n'oublierons jamais. Je remercie également Mme Dubreil-Jacotin d'avoir accepté de guider nos études sur des questions qui nous étaient peu familières, et dont l'intérêt pour nos recherches futures est très grand.

CHAPITRE I

MAJORATIONS ET MINORATIONS ASYMPTOTIQUES DES VALEURS EXTRÊMES D'UN ÉCHANTILLON

I - INTRODUCTION -

a) Echantillon ordonné.

On dit qu'un ensemble de n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \dots, X_n$ ayant la même loi marginale $F(x)$ constitue un échantillon de taille n de cette loi. On a :

$$\Pr \{X_i < x\} = F(x) \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n.$$

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une réalisation de l'échantillon. Ordonnons ces nombres par valeurs croissantes - ou plutôt, par valeurs non décroissantes, car si $F(x)$ est discontinue, il y a une probabilité positive pour que certains des x_i soient égaux. On obtient ainsi la suite :

$$x_1^* \leq x_2^* \leq \dots \leq x_n^*$$

Nous appellerons $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$ les v. a. définies dans la même catégorie d'épreuves que l'échantillon et admettant respectivement pour réalisations $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$. Ces variables sont liées par :

$$X_1^* \leq X_2^* \leq \dots \leq X_n^*$$

Leur ensemble constitue un échantillon ordonné de taille n de la loi $F(x)$. On dit aussi que X_r^* est la valeur de rang r de l'échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$; cette expression est commode, bien que peu logique, car X_r^* n'est pas l'une des variables de l'échantillon. Selon cette terminologie, X_1^* est la plus petite valeur de l'échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, X_n^* est la plus grande.

b) Notations.

Au cours du présent travail nous considérerons des suites d'échantillons de taille croissante d'une même loi, et nous étudierons leurs valeurs dont le rang - compté à partir de X_1^* ou de X_n^* - est fixe.

Nous poserons : $Y_n^\alpha = X_{n-\alpha+1}^*$; $Z_n^\beta = X_n^*$.

Les variables Y_n^α et Z_n^β , où α et β sont fixes, seront appelées les valeurs extrêmes de l'échantillon.

Nous remplacerons souvent Y_n^1 par Y_n et Z_n^1 par Z_n .

Le milieu de l'échantillon sera : $M_n = \frac{1}{2} (Y_n + Z_n)$; son étendue $R_n = Y_n - Z_n$.

Plus généralement, nous pourrions faire intervenir de "pseudo-milieus" $M_n^{\alpha,\beta} = \frac{1}{2} (Y_n^\alpha + Z_n^\beta)$ et de "pseudo-étendues" $R_n^{\alpha,\beta} = Y_n^\alpha - Z_n^\beta$.

c) Lois marginales.

Il est facile d'obtenir les lois de Y_n^α ou Z_n^β . La quantité :

$$F_{Y_n}(x) = \Pr \{ Y_n < x \}$$

est la probabilité pour que toutes les variables de l'échantillon soient inférieures à x .

$$\text{Donc : } F_{Y_n}(x) = F^n(x).$$

$$\text{La quantité : } F_{Y_n^\alpha}(x) = \Pr \{ Y_n^\alpha < x \}$$

est la probabilité pour que $(n - \alpha + 1)$ variables de l'échantillon au moins soient inférieures à x . On partage cet événement en événements incompatibles en supposant que le nombre de X_i inférieures à x est égal à $n - \alpha + 1$, ou $n - \alpha + 2$, ... ou n . Cela donne :

$$F_{Y_n^\alpha}(x) = C_n^{\alpha-1} F^{n-\alpha+1}(x) [1 - F(x)]^{\alpha-1} + C_n^{\alpha-2} F^{n-\alpha+2}(x) [1 - F(x)]^{\alpha-2} + \dots + F^n(x) \quad (1)$$

Le même raisonnement conduit à :

$$F_{Z_n}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n$$

$$1 - F_{Z_n^\beta}(x) = C_n^{\beta-1} F^{\beta-1}(x) [1 - F(x)]^{n-\beta+1} + C_n^{\beta-2} F^{\beta-2}(x) [1 - F(x)]^{n-\beta+2} + \dots + [1 - F(x)]^n$$

II - LES CONVERGENCES STOCHASTIQUES -

a) En plus des modes classiques de convergence d'une suite

de v. a. X_n , nous utiliserons celui que Hsu et Robbins ont défini en 1947 sous le nom de "complete convergence". Nous suivrons M. Dugué en l'appelant convergence presque complète.

Rappelons brièvement les définitions des convergences classiques les plus importantes.

1/ - La suite X_n , dont la f. d. r. est $F_n(x)$, converge en loi (ou légalement) vers X , dont la f. d. r. est $F(x)$, si $F_n(x) - F(x) \longrightarrow 0$ avec $1/n$ en tout point de continuité de $F(x)$.

2/ - La suite X_n converge en probabilité vers X (qui peut être une v. a. ou une quantité certaine) si :

$$\Pr \{ |X_n - X| < \epsilon \} \longrightarrow 1 \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty$$

quelque soit le nombre positif ϵ .

Si X est un nombre certain, la convergence en probabilité équivaut à la convergence en loi.

3/ - La suite X_n converge presque sûrement (ou presque certainement) vers X si :

$$\Pr \left\{ \bigcap_{\nu=n}^{\infty} [|X_\nu - X| < \epsilon] \right\} \longrightarrow 1$$

quel que soit le nombre positif ϵ .

b) Nous allons maintenant définir la convergence presque complète (ou presque complètement sûre).

Définition.

Etant donné une suite de v. a. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ on lui associe la suite $X'_1, X'_2, \dots, X'_n, \dots$ dont les variables sont indépendantes et telles que la loi marginale de X'_n soit identique à la loi marginale de X_n pour tout n .

On dit alors que X_n converge presque complètement vers un nombre certain a si X'_n converge presque sûrement vers a .

THEOREME I -

Si X_n converge presque complètement vers a , il converge aussi presque sûrement vers cette limite.

Démonstration.

ε étant un nombre positif arbitrairement petit, appelons e_n et e'_n les deux événements suivants :

$$e_n = \{ |X_n - a| < \varepsilon \} \quad ; \quad e'_n = \{ |X'_n - a| < \varepsilon \}$$

Si X_n converge presque complètement vers a , il est presque sûr que tous les e'_n sont réalisés à partir d'un certain rang. Comme ces événements sont indépendants, le lemme de Borel-Cantelli nous montre que la série $\sum \Pr \{ \bar{e}'_n \}$ est convergente.

X_n et X'_n ayant même loi, on a : $\Pr \{ \bar{e}_n \} = \Pr \{ \bar{e}'_n \}$

La série $\sum \Pr \{ \bar{e}_n \}$ est donc convergente.

D'autre part, si l'on pose :

$$\bar{w}_n = \Pr \left\{ \bigcap_{\nu=n}^{\infty} e_{\nu} \right\}$$

l'inégalité nous donne :

$$1 - \bar{w}_n = \Pr \left\{ \bigcup_{\nu=n}^{\infty} \bar{e}_{\nu} \right\} \leq \sum_{\nu=n}^{\infty} \Pr \{ \bar{e}_{\nu} \}$$

Or le second membre de cette relation tend vers 0 avec $1/n$ puisque c'est le reste de la série convergente $\sum \Pr \{ \bar{e}_n \}$. Il en résulte que $\bar{w}_n \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow \infty$, et par suite il est presque sûr que tous les e_n sont réalisés à partir d'un certain rang, ce qui établit la convergence presque certaine de X_n vers a .

On peut voir aisément sur un exemple que la réciproque de ce théorème n'est pas vraie. La convergence presque complète est donc plus forte que la convergence presque certaine.

THEOREME 2 -

La suite X_n converge presque complètement vers a si et seulement si la série de terme général :

$$1 - F_n(a + \varepsilon) + F_n(a - \varepsilon) \text{ est convergente pour tout } \varepsilon > 0.$$

Démonstration :

En effet, on a :

$$\Pr \{ \bar{e}'_1 \} = 1 - F_1(a + \varepsilon) + F_1(a - \varepsilon)$$

tout au moins si $a + \varepsilon$ et $a - \varepsilon$ sont des points de continuité de $F_n(x)$, ce que l'on peut toujours supposer sans nuire à la généralité de la démonstration.

Pour que X_n converge presque complètement, il faut et il suffit que, ε étant arbitrairement choisi, le nombre d'événements $\bar{e}_k$ soit presque sûrement fini, c'est-à-dire que :

$$\sum [1 - F_n(a + \varepsilon) + F_n(a - \varepsilon)] \quad \text{soit finie.}$$

On peut évidemment décomposer cette condition en deux autres et dire que la convergence presque complète de X_n vers a équivaut à :

$$\sum [1 - F_n(a + \varepsilon)] < \infty \quad \text{et} \quad \sum [F_n(a - \varepsilon)] < \infty$$

pour tout ε positif.

Remarque.

Une suite de v. a. X_n converge presque complètement vers une limite aléatoire X si $(X_n - X)$ converge presque complètement vers 0.

Pour représenter les quatre modes de convergence dont nous venons de parler, nous emploierons les symboles suivants :

En loi : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$; en probabilité : $X_n \xrightarrow{p} X$; presque sûre : $X_n \xrightarrow{p.s.} X$; presque complète : $X_n \xrightarrow{p.c.o.} X$.

c) Application aux valeurs extrêmes.

Supposons d'abord que la répartition de X soit limitée à droite, c'est-à-dire que la borne supérieure des valeurs de x telles que :

$$F(x) < 1 \quad \text{soit un nombre fini } a.$$

On a alors : $X_n \leq a$ pour tout n , et :

$$F(a - \varepsilon) < 1 \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

Si l'on fait $x = a - \varepsilon$ dans la formule (1), chacun des monômes du second membre est majoré par $n^{a-1} \cdot F^{n-a+1}(a - \varepsilon)$.

$$\text{Donc :} \quad F_{\gamma_n}^a(a - \varepsilon) < \alpha n^{a-1} F^{n-a+1}(a - \varepsilon).$$

La série du terme général $u_n = \alpha n^{a-1} F^{n-a+1}(a - \varepsilon)$ est convergente, car $u_{n+1} / u_n \rightarrow F(a - \varepsilon)$. On en déduit que la série $\sum_1^\infty F_{\gamma_n}^a(a - \varepsilon)$

est convergente et par suite, d'après le théorème 2 on voit que $Y_n \xrightarrow{p.c.o.} a$.

Envisageons maintenant le cas où la répartition de X s'étend à l'infini vers la droite, c'est-à-dire le cas où $F(a) < 1$ quel que soit a .

La série $\sum F_{Y_n} (a)$ est alors convergente aussi grand que soit a , ce qui prouve que $Y_n \xrightarrow{p.c.o.} +\infty$

Par symétrie, on a des résultats analogues pour Z_n .

III - MAJORATION ET MINORATION EN PROBABILITE DES V.E.

L'étude que nous allons faire étant surtout intéressante dans le cas où la répartition est illimitée, nous pourrions supposer cette condition remplie.

a) Cas des plus grandes valeurs.

Définitions.

Une suite de nombres certains b_n majore Y_n^α en probabilité si :

$$\Pr \{ Y_n^\alpha < b_n \} \longrightarrow 1 \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty$$

Cela s'écrit : $Y_n <_p b_n$

De même, une suite de nombres certains a_n minore Y_n^α en probabilité si :

$$\Pr \{ a_n \leq Y_n^\alpha \} \longrightarrow 1 \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty$$

Cela s'écrit : $a_n <_p Y_n$

Bien entendu, ces définitions peuvent s'appliquer à toute suite aléatoire X_n et pas seulement aux plus grandes valeurs d'un échantillon.

THEOREME 3 -

On a $Y_n <_p b_n$ si et seulement si :

$$n [1 - F(b_n)] \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty$$

De même, $a_n <_p Y_n$ si et seulement si :

$$n [1 - F(a_n)] \longrightarrow \infty \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty$$

Démonstration.

Nous savons que : $\Pr \{ Y_n < b_n \} = F^n(b_n)$. Pour que cette quantité tende vers 1 quand $n \rightarrow \infty$, il faut et il suffit que $n \operatorname{Log} F(b_n) \rightarrow 0$ avec $1/n$.

Or, si l'on pose $G(b_n) = 1 - F(b_n)$, il est clair que $G(b_n) \rightarrow 0$ si $F^n(b_n) \rightarrow 1$, et par suite :

$$n \operatorname{Log} F(b_n) \sim n G(b_n)$$

ce qui établit le premier résultat.

D'autre part, la relation $a_n <_p Y_n$ équivaut à :

$$F^n(a_n) \rightarrow 0 \text{ avec } 1/n, \text{ ou } n \operatorname{Log} [1 - G(a_n)] \rightarrow -\infty$$

Pour cela il faut et il suffit que $n G(a_n) \rightarrow +\infty$

Corollaire 3.

Soit $B(x)$ une fonction monotone croissante, et $B^{-1}(x)$ la fonction inverse. La condition : $Y_n <_p B(n)$ équivaut à : $B^{-1}(t) G(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Démonstration.

En effet, pour que $Y_n <_p B(n)$, il faut et il suffit que $n G[B(n)] \rightarrow 0$ avec $1/n$, et cela équivaut à $x G B(x) \rightarrow 0$ avec $1/x$ car, si x n'est pas entier, on peut écrire :

$$n G[B(n+1)] < x G[B(x)] < (n+1) G[B(n)]$$

en posant : $n \leq x < n+1$.

Quand $x \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, et les deux valeurs qui encadrent $x G B(x)$ tendent vers 0.

Le changement de variable : $t = B(x)$ conduit alors à la condition indiquée.

On verrait de la même façon que la condition $A(n) <_p Y_n$ équivaut à $A^{-1}(t) G(t) \rightarrow \infty$ avec t , en appelant $A(x)$ une fonction monotone croissante.

THEOREME 4 -

Si la suite a_n minore en probabilité Y_n^α , elle minore aussi en probabilité Y_n^ν quel que soit l'entier fixe ν .

Démonstration.

Pour démontrer ce théorème, il nous suffira de prouver que :

$$a_n <_p Y_n^\alpha \text{ entraîne : } a_n <_p Y_n^{\alpha+1}$$

Considérons les trois événements suivants :

$$e_n = \{ a_n \leq Y_n^\alpha \} ; \quad e_n' = \{ Y_n^{\alpha+1} < a_n \leq Y_n^\alpha \}$$

$$e_n'' = \{ a_n \leq Y_n^{\alpha+1} \}$$

e_n' et e_n'' sont incompatibles, et l'on a : $e_n = e_n' + e_n''$.

Les probabilités de ces trois événements sont donc liées par :

$$\varpi_n = \varpi_n' + \varpi_n''$$

Puisque $a_n <_p Y_n$, $\varpi_n \longrightarrow 1$ quand $n \longrightarrow \infty$.

D'autre part, on a :

$$\varpi_n' = C_n^\alpha F^{n-\alpha}(a_n) [1 - F(a_n)]^2 < \frac{n^\alpha}{\alpha!} F^{n-\alpha}(a_n) [1 - F(a_n)]^2$$

et, à fortiori : $\varpi_n' < [n G(a_n)]^\alpha F^{n-\alpha}(a_n)$

$$\text{Log } \varpi_n' < \alpha \text{ Log } [n G(a_n)] + (n - \alpha) \text{ Log } [1 - G(a_n)]$$

$$< \alpha \text{ Log } [n G(a_n)] - (n - \alpha) G(a_n)$$

D'après le théorème (3), $n G(a_n) \longrightarrow +\infty$ avec n . On voit alors que le second membre de l'inégalité précédente est équivalent à $-n G(a_n)$, donc il tend vers $-\infty$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Il en résulte que $\varpi_n' \longrightarrow 0$ avec $1/n$.

De la relation $\varpi_n'' = \varpi_n - \varpi_n'$, on déduit que $\varpi_n'' \longrightarrow 1$ quand $n \longrightarrow \infty$, ou encore que :

$$a_n <_p Y_n^{\alpha+1} \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque.

Au lieu de faire intervenir tous les indices n , on pourrait ne conserver que certains d'entre eux formant une suite infinie n_ν . Il suffirait de remplacer n par n_ν dans la démonstration précédente pour voir que : $a_{n_\nu} <_p Y_{n_\nu}^\alpha$ pour une valeur donnée de α entraîne la même relation pour toute valeur fixe de α .

THEOREME 5 -

Si la suite b_n majore en probabilité Y_n^α , elle majore en probabilité Y_n .

Démonstration.

Il nous suffira de montrer que :

$$Y_n^\alpha <_p b_n \quad \text{entraîne} \quad Y_n^{\alpha-1} <_p b_n$$

Considérons les trois événements :

$$e_n = \{ Y_n^\alpha < b_n \} ; e_n^I = \{ Y_n^\alpha < b_n \leq Y_n^{\alpha-1} \} ; e_n^{II} = \{ Y_n^{\alpha-1} < b_n \}$$

e_n^I et e_n^{II} sont incompatibles et tels que $e_n = e_n^I + e_n^{II}$.

Les probabilités de e_n , e_n^I , e_n^{II} vérifient donc :

$$\bar{\omega}_n = \bar{\omega}_n^I + \bar{\omega}_n^{II}.$$

Par hypothèse $Y_n^\alpha <_p b_n$, donc $\bar{\omega}_n \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow \infty$.

On obtient aisément :

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_n^I &= C_n^{\alpha-1} F^{n-\alpha+1}(b_n) [1 - F(b_n)]^{\alpha-1} < \frac{n^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} F^{n-\alpha+1}(b_n) [1 - F(b_n)]^{\alpha-1} \\ &< [n G(b_n)]^{\alpha-1} F^{n-\alpha+1}(b_n). \end{aligned}$$

$$\text{Log } \bar{\omega}_n^I < (\alpha-1) \text{Log } [n G(b_n)] + (n-\alpha+1) \text{Log } [1 - G(b_n)].$$

D'après le théorème (3), $n G(b_n) \rightarrow 0$ avec $1/n$. Il en résulte que le second membre de l'inégalité ci-dessus est un infiniment grand équivalent à $(\alpha-1) \text{Log } [n G(b_n)]$; ainsi $\text{Log } \bar{\omega}_n^I \rightarrow -\infty$ et $\bar{\omega}_n^I \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

La relation $\bar{\omega}_n^{II} = \bar{\omega}_n - \bar{\omega}_n^I$ nous montre alors que $\bar{\omega}_n^{II} \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow \infty$, c'est-à-dire que :

$$Y_n^{\alpha-1} <_p b_n \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque.

Les théorèmes 4 et 5 précisent le fait qu'il est impossible de "séparer" en quelque sorte deux des plus grandes valeurs, c'est-à-dire de trouver une suite a_n telle que :

$$\text{Pr } \{ Y_n^{\alpha+1} < a_n \leq Y_n^\alpha \} \rightarrow 1 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

b) Cas des plus petites valeurs.

Les résultats relatifs aux Y_n^a se transposent immédiatement en résultats sur les Z_n^b en observant que le changement de variable $X'_i = -X_i$ transforme un échantillon de la loi $F(x)$ en un échantillon de la loi $F'(x) = 1 - F(-x)$ pour lequel $-Z_n$ est une des plus grandes valeurs.

Par exemple, nous aurons ainsi :

THEOREME 3' -

On a $b_n \ll_p Z_n$ si et seulement si :

$$n F(b_n) \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty.$$

De même, $Z_n \ll_p a_n$ si et seulement si :

$$n F(a_n) \longrightarrow \infty \quad \text{avec } n.$$

Corollaire 3'.

$B(x)$ étant une fonction monotone décroissante, la condition $B(n) \ll_p Z_n$ équivaut à :

$$B^{-1}(t) F(t) \longrightarrow 0 \quad \text{quand } t \longrightarrow -\infty.$$

Notons enfin que les théorèmes 3, 4, et 5 s'étendent sans modification au cas où la répartition de X est limitée à droite. Si M est la borne supérieure de cette répartition, le corollaire 3 est valable à condition de remplacer " $t \longrightarrow +\infty$ " par " $t \longrightarrow M$ ".

IV - MAJORATION ET MINORATION PRESQUE SURES DES V.E. -

a) Définition.

Etant donné une suite aléatoire X_n et une suite certaine b_n , nous dirons que b_n majore presque sûrement X_n si :

$$\Pr \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X_n < b_n\} \longrightarrow 1 \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty.$$

Nous traduirons cela par le symbole : $X_n \leq_{p.s.} b_n$.

Les suites b_n que nous considérerons ci-après seront toujours supposées monotones.

Lemme 6.

Soit Y_n la plus grande valeur d'un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Pour que $Y_n \leq_{p.s.} b_n$, il faut et il suffit que $X_n \leq_{p.s.} b_n$.

En effet, l'inégalité $Y_n < b_n$ entraîne $X_n < b_n$.

Donc : $Y_n \ll_{p.s.} b_n$ entraîne $X_n \ll_{p.s.} b_n$.

Réciproquement, si $X_n \ll_{p.s.} b_n$, à tout nombre positif ε arbitrairement petit correspond un nombre p tel que :

$$\Pr \left\{ \bigcap_{i=p}^{\infty} [X_i < b_i] \right\} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

On peut aussi trouver un nombre $q \geq p$ tel que :

$$\Pr \left\{ \bigcap_{j=1}^{p-1} [X_j < b_q] \right\} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

En appliquant l'inégalité de Boole aux événements contraires des deux précédents, on voit alors que l'on a, avec une probabilité au moins égale à $1 - \varepsilon$:

$$X_1 < b_q, X_2 < b_q, \dots, X_{p-1} < b_q$$

$$X_p < b_p, X_{p+1} < b_{p+1}, \dots$$

Or, ces inégalités entraînent :

$$Y_q < b_q, Y_{q+1} < b_{q+1}, \dots, Y_n < b_n, \dots$$

Finalement, la condition $Y_n \ll_{p.s.} b_n$ est bien vérifiée.

THEOREME 6 -

Pour que $Y_n \ll_{p.s.} b_n$ il faut et il suffit que la série $\sum G(b_n)$ soit convergente.

Démonstration.

D'après le lemme précédent, la relation $Y_n \ll_{p.s.} b_n$ équivaut à $X_n \ll_{p.s.} b_n$. Les variables X_n étant indépendantes :

$$\Pr \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} (X_n < b_n) \right\} = \prod_{n=1}^{\infty} [1 - G(b_n)]$$

Pour que ce produit infini tende vers 1 quand $n \rightarrow \infty$, il faut et il suffit que la série $\sum G(b_n)$ soit convergente, ce qui établit le théorème.

Lemme 7.

Considérons une fonction $B(x)$ définie pour $x \geq 0$, et monotone croissante ; nous la supposons même continue car, en réalité, ce qui

compte surtout, c'est la suite des valeurs $B(n) = b_n$ que prend $B(x)$ quand x parcourt la suite des entiers positifs.

Dans ces conditions, l'intégrale $\int_0^{+\infty} B^{-1}(x) dF(x)$ est de même nature que la série $\sum G(b_n)$. ($B^{-1}(x)$ représente la fonction inverse de $B(x)$).

Démonstration.

La série $\sum G(b_n)$ est à termes non croissants. D'après le théorème de Cauchy, elle est de même nature que l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} G[B(x)] dx.$$

Effectuons dans cette intégrale le changement de variable : $t = B(x)$, ou : $x = B^{-1}(t)$.

Elle devient : $I = \int_0^{+\infty} G(t) dB^{-1}(t)$

si l'on suppose que $B(0) = 0$, ce qui est toujours possible.

A étant un nombre positif très grand, nous pouvons écrire, en intégrant par parties :

$$\int_0^A G(t) dB^{-1}(t) = \left| G(t) B^{-1}(t) \right|_0^A + \int_0^A B^{-1}(t) dF(t) \quad (2)$$

On a donc : $\int_0^A B^{-1}(t) dF(t) < \int_0^A G(t) dB^{-1}(t)$

Si I existe, l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} B^{-1}(t) dF(t)$ existe aussi, car $\int_0^A B^{-1}(t) dF(t)$ est une fonction croissante de A majorée par I.

Réciproquement, si J existe, on a :

$$\int_0^{+\infty} B^{-1}(t) dF(t) > B^{-1}(A) G(A)$$

ce qui montre que $B^{-1}(A) G(A) \rightarrow 0$ avec $1/A$. Il résulte alors de la relation (2) que I existe aussi, et est égal à J. Finalement la série $\sum G(b_n)$ et l'intégrale J sont de même nature, C. Q. F. D.

THEOREME 7 -

Pour que $Y_n \leq_{p.s.} b_n$ il faut et il suffit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} B^{-1}(x) dF(x)$ existe.

C'est là une conséquence immédiate du théorème 6 et du lemme 7.

b) Les résultats analogues aux précédents et relatifs à Z_n sont les suivants :

Lemme 6'.

$$b_n \underset{p.s.}{<<} Z_n \text{ si et seulement si } b_n \underset{p.s.}{<<} X_n.$$

THEOREME 6' -

Pour que $b_n \underset{p.s.}{<<} Z_n$, il faut et il suffit que la série $\sum F(b_n)$ soit convergente.

THEOREME 7' -

Pour que $b_n \underset{p.s.}{\leq} Z_n$, il faut et il suffit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} B^{-1}(x) dF(x)$ existe.

On peut également envisager simultanément la majoration de Y_n par b_n et la minoration de Z_n par $-b_n$. On déduit des théorèmes 6, 6', et 7' le suivant :

THEOREME 8 -

Pour que l'on ait : $-b_n \underset{p.s.}{<<} Z_n$ et $Y_n \underset{p.s.}{<<} b_n$ il faut et il suffit, ou bien que la série $\sum [G(b_n) + F(-b_n)]$ soit convergente, ou bien que :

$$E \{ B^{-1}(|x|) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} B^{-1}(|x|) dF(x) \text{ existe.}$$

Remarque

Le problème de la majoration presque sûre de Y_n^α n'est résolu que pour $\alpha = 1$; quant au problème de la minoration p. s. de Y_n^α , il n'est résolu pour aucune valeur de α .

V - MAJORATION ET MINORATION PRESQUE COMPLETE DES V.E.

a) Majoration p.co. de Y_n^α .

1/ - Définition.

Etant donné une suite aléatoire $X_1, X_2, \dots, X_n$, associons-lui la suite aléatoire $X_1', X_2', \dots, X_n', \dots$ dont les variables sont mutuellement indépendantes et telles que X_n' ait même loi que X_n pour toute valeur de n .

Nous dirons qu'une suite (b_n) majore presque complètement la suite (X_n) si elle majore presque sûrement la suite (X_n') .

Nous écrirons alors : $X_n \ll_{p.c.o.} b_n$.

On définirait de même la minoration presque complète de X_n .

Il résulte immédiatement de la définition de : $X_n \ll_{p.c.o.} b_n$ que cette relation équivaut à : $\sum_1^{\infty} [1 - F_{X_n}(b_n)] < \infty$

Propriété

$$X_n \ll_{p.c.o.} b_n \quad \text{entraîne} \quad X_n \ll_{p.s.} b_n$$

La démonstration est analogue à celle du théorème 1.

2/ - Nous allons chercher une condition nécessaire et suffisante de majoration p. co. de Y_n^α par une suite certaine monotone b_n . Il faut d'abord remarquer que si l'on a : $Y_n^\alpha \ll_{p.c.o.} b_n$ on a aussi $Y_n^\alpha \ll_p b_n$ et, d'après le théorème 5 : $Y_n^1 \ll_p b_n$. Cela entraîne, d'après le théorème 5, que $n G(b_n) \rightarrow 0$ avec $1/n$. Le lemme suivant nous permettra d'obtenir la condition cherchée.

Lemme 9.

Etant donné une suite b_n telle que $n G(b_n) \rightarrow 0$, avec $1/n$, on a :

$$1 - F_{Y_n^\alpha}(b_n) \sim \frac{n^\alpha G^\alpha(b_n)}{\alpha!}$$

Démonstration.

Si $F(x)$ est continue, un raisonnement immédiat montre que la probabilité élémentaire de Y_n est :

$$\frac{n!}{(n-\alpha)! (\alpha-1)!} F^{n-\alpha}(x) [1 - F(x)]^{\alpha-1} dF(x)$$

$$\text{ou : } dF_{Y_n^\alpha}(x) = \frac{-n!}{(n-\alpha)! (\alpha-1)!} [1 - G(x)]^{n-\alpha} G^{\alpha-1}(x) dG(x)$$

On en déduit :

$$F_{Y_n^\alpha}(x) = 1 - \frac{n!}{(n-\alpha)! (\alpha-1)!} \int_{+\infty}^x [1 - G(x)]^{n-\alpha} G^{\alpha-1}(x) dG(x)$$

En effectuant dans l'intégrale le changement de variable $\xi = G(x)$ il vient :

$$F_{Y_n^\alpha}(x) = 1 - \frac{n!}{(n-\alpha)! (\alpha-1)!} \int_0^{G(x)} (1-\xi)^{n-\alpha} \xi^{\alpha-1} d\xi$$

Or, il est clair que la valeur de $F_{\gamma_n}^{\alpha}(x)$ dépend uniquement de $G(x)$, et non des propriétés de cette fonction. L'expression ci-dessus est donc encore valable si $G(x)$ - ou $F(x)$ - est discontinue. On peut alors écrire, dans tous les cas :

$$1 - F_{\gamma_n}^{\alpha}(b_n) = \frac{n!}{(n-\alpha)! (\alpha-1)!} \int_0^{G(b_n)} (1-\xi)^{n-\alpha} \xi^{\alpha-1} d\xi$$

On a : $1 - G(b_n) \leq 1 - \xi \leq 1$ quand $\xi \in [0, G(b_n)]$

Donc $[1 - G(b_n)]^n \leq (1 - \xi)^{n-\alpha} \leq 1$

Le premier terme de l'inégalité tend vers 1 quand $n \rightarrow \infty$ puisque $n G(b_n) \rightarrow 0$ avec $1/n$. Par suite :

$$1 - F_{\gamma_n}^{\alpha}(b_n) \sim \frac{n!}{(n-\alpha)! (\alpha-1)!} \int_0^{G(b_n)} \xi^{\alpha-1} d\xi = \frac{n!}{(n-\alpha)! \alpha!} G^{\alpha}(b_n)$$

et finalement :

$$1 - F_{\gamma_n}^{\alpha}(b_n) \sim \frac{1}{\alpha!} [n G(b_n)]^{\alpha} \quad \text{C. Q. F. D.}$$

THEOREME 9 -

Pour que $Y_n^{\alpha} \underset{p.c.o.}{<<} b_n$ il faut et il suffit que la série $\sum_1^{\infty} [n G(b_n)]^{\alpha}$ soit convergente.

Démonstration.

En effet si cette série est convergente, $n G(b_n) \rightarrow 0$ avec $1/n$ et l'on a, d'après le lemme 9 :

$$1 - F_{\gamma_n}^{\alpha}(b_n) \sim \frac{1}{\alpha!} [n G(b_n)]^{\alpha}$$

ce qui montre que $\sum_1^{\infty} [1 - F_{\gamma_n}^{\alpha}(b_n)] < \infty$, donc que $Y_n^{\alpha} \underset{p.c.o.}{<<} b_n$.

Réciproquement, si $Y_n^{\alpha} \underset{p.c.o.}{<<} b_n$, on a aussi $Y_n^1 \underset{p.}{<<} b_n$ et par suite $n G(b_n) \rightarrow 0$ avec $1/n$. On peut alors écrire :

$$1 - F_{\gamma_n}^{\alpha}(b_n) \sim \frac{1}{\alpha!} [n G(b_n)]^{\alpha}$$

et puisque la série $\sum_1^{\infty} [1 - F_{\gamma_n}^{\alpha}(b_n)]$ est convergente, la série

$\sum_1^{\infty} [n G(b_n)]^{\alpha}$ l'est également.

C. Q. F. D.

THEOREME 10 -

Etant donné une fonction monotone croissante $B(t)$ qui tend vers $+\infty$ avec t , on a :

$$Y_n^\alpha < B(n) \quad \text{si et seulement si l'intégrale :} \\ \int_0^{+\infty} [B^{-1}(x)]^{\alpha+1} G^{\alpha-1}(x) dF(x) \quad \text{existe.}$$

Démonstration.

En vertu du théorème 9, il nous suffit de montrer que l'intégrale envisagée est de même nature que la série $\sum n^\alpha G^\alpha [B(n)]$.

On peut écrire :

$$\int_n^{n+1} t^\alpha G^\alpha [B(n+1)] dt < \int_n^{n+1} t^\alpha G^\alpha [B(t)] dt < \int_n^{n+1} t^\alpha G^\alpha [B(n)] dt$$

D'où en appliquant la formule de la moyenne :

$$(n + \theta_n)^\alpha G^\alpha [B(n+1)] < \int_n^{n+1} t^\alpha G^\alpha [B(t)] dt < (n + \theta_n!)^\alpha G^\alpha [B(n)]$$

avec : $0 < \theta_n < 1$ et $0 < \theta_n! < 1$.

La série $\sum n^\alpha G^\alpha [B(n)]$ est donc de même nature que la série :

$$\sum \left(\int_n^{n+1} t^\alpha G^\alpha [B(t)] dt \right) = \int_0^{+\infty} t^\alpha G^\alpha [B(t)] dt$$

Une intégration par parties nous donne :

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha G^\alpha [B(t)] dt = \frac{A^{\alpha+1}}{\alpha+1} G^\alpha [B(A)] - \frac{\alpha}{\alpha+1} \int_0^A t^{\alpha+1} G^{\alpha-1} [B(t)] dG [B(t)] \quad (3)$$

D'après cette relation, si l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} t^\alpha G^\alpha [B(t)] dt \quad \text{existe,}$$

l'intégrale : $J = \int_0^{+\infty} t^{\alpha+1} G^{\alpha-1} [B(t)] dF [B(t)]$ existe aussi.

Réciproquement, supposons que J existe. On a alors :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_A^{+\infty} t^{\alpha+1} d \{ G^\alpha [B(t)] \} = 0$$

et à fortiori : $\lim_{A \rightarrow +\infty} \{ A^{\alpha+1} G^\alpha [B(A)] \} = 0$

La relation (3) nous montre alors que I existe. Finalement, nous voyons que la série $\sum n^\alpha G^\alpha [B(n)]$ est de même nature que l'intégrale J .

Or, si l'on effectue dans J le changement de variable : $x = B(t)$, elle devient :

$$J = \int_0^{+\infty} [B^{-1}(x)]^{\alpha+1} G^{\alpha-1}(x) dF(x), \text{ et le théorème est établi.}$$

Remarque.

Considérons deux v. e. Y_n^α et Y_n^β ($\beta < \alpha$). Il est bien évident que la série $\sum n^\alpha G^\alpha(b_n)$ peut être convergente sans que la série $\sum n^\beta G^\beta(b_n)$ le soit. Autrement dit, on peut avoir $Y_n^\alpha << b_n$ sans que $Y_n^\beta << b_n$ ait lieu. La propriété de la majoration en probabilité qui fait l'objet du théorème 5 ne s'étend donc pas à la majoration presque complète.

b) Minoration presque complète de Z_n^β .

Par la symétrie que nous avons déjà indiquée, on déduit des résultats précédents les résultats analogues relatifs à Z_n^β :

THEOREME 11 -

Pour que $b_n <<_{p.co.} Z_n^\beta$ il faut et il suffit ou bien que la série $\sum [n F(b_n)]^\beta$ soit convergente, ou bien que l'intégrale $\int_0^{+\infty} [B^{-1}(x)]^{\beta+1} F^{\beta-1}(x) dF(x)$ existe.

On pourrait aussi envisager la majoration p.co. de Y_n et la minoration p.co. de Z_n simultanément.

c) Minoration presque complète de Y_n^α ; majoration p.co. de Z_n^β .

THEOREME 12 -

Pour que $a_n <<_{p.co.} Y_n^\alpha$, il faut et il suffit que $n G(a_n) \rightarrow \infty$ avec n , et que la série de terme général $F^n(a_n) [n G(a_n)]^{\alpha-1}$ soit convergente.

Démonstration.

Effectivement, si $a_n <<_{p.co.} Y_n^\alpha$, on a à fortiori $a_n <<_p Y_n^1$, ce qui entraîne $n G(a_n) \rightarrow \infty$. De plus, la série de terme général $F_{Y_n^\alpha}(a_n)$ est convergente.

D'après la formule (1), on peut écrire :

$$F_{Y_n^\alpha}(a_n) = C_n^{\alpha-1} F^{n-\alpha+1}(a_n) G^{\alpha-1}(a_n) + C_n^{\alpha-2} F^{n-\alpha+2}(a_n) G^{\alpha-2}(a_n) \dots + \dots + F^n(a_n) \quad (4)$$

Comparons les différents monômes du second membre. Le rapport des deux monômes de rang p et $p+1$ est égal à $\frac{n-\alpha+p+1}{\alpha-p} \frac{G(a_n)}{F(a_n)} = r$. $\alpha-p$ est compris entre 1 et $\alpha-1$; $F(a_n) \rightarrow 1$.

On a donc :
$$r \sim \frac{n G(a_n)}{\alpha-p} \rightarrow \infty \text{ avec } n.$$

Le second membre de (4) est donc équivalent à son premier terme :

$$F_{\gamma_n^\alpha}(a_n) \sim \frac{n(n-1) \dots (n-\alpha+2)}{(\alpha-1)!} F^{n-\alpha+1}(a_n) G^{\alpha-1}(a_n) \sim \frac{n^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} F^n(a_n) G^{\alpha-1}(a_n)$$

Puisque la série $\sum F_{\gamma_n^\alpha}(a_n)$ est convergente, il en est de même pour la série $\sum n^{\alpha-1} F^n(a_n) G^{\alpha-1}(a_n)$.

Réciproquement, si $n G(a_n) \rightarrow \infty$, le calcul précédent montre que :

$$F_{\gamma_n^\alpha}(a_n) \sim \frac{n^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} F^n(a_n) G^{\alpha-1}(a_n)$$

La convergence de la série $\sum F^n(a_n) [n G(a_n)]^{\alpha-1}$ entraîne alors celle de $\sum F_{\gamma_n^\alpha}(a_n)$, et finalement on a : $a_n \ll_{p.co.} Y_n^\alpha$.

Remarque.

Etant donné deux v. e. Y_n^α et Y_n^β avec $\beta > \alpha$ une suite a_n peut minorer p. co. Y_n^α sans minorer p. co. Y_n^β . Par exemple, choisissons a_n tel que :

$$F^n(a_n) = \frac{1}{n (\ln)^2}$$

On a : $a_n \ll_{p.co.} Y_n^\alpha$. Un calcul immédiat donne :

$$G(a_n) \sim \frac{\ln}{n} \quad \text{d'où :} \quad F^n(a_n) n G(a_n) \sim \frac{1}{n \ln}$$

La série $\sum F^n(a_n) n G(a_n)$ est donc divergente, et par suite a_n ne minore pas p. co. Y_n^β . Ainsi le théorème 4 n'a pas d'analogue en ce qui concerne la minoration p. co.

THEOREME 12' -

Pour que $Z_n^\beta \ll_{p.co.} a_n$, il faut et il suffit que $n F(a_n) \rightarrow \infty$ avec n , et que la série de terme général $G^n(a_n) [n F(a_n)]^\beta$ soit convergente.

VI - SUR UNE CLASSE DE FONCTIONS MAJORANTES REMARQUABLES -

1/ - Envisageons tout d'abord le cas où la fonction $B(n)$ a une partie principale de la forme : $k \cdot n^\mu$ ($\mu > 0$).

On a alors : $B(x) \sim k x^\mu$ et si l'on pose : $B(x) = t$ on obtient :

$$x = B^{-1}(t) \sim \left(\frac{t}{k}\right)^{\frac{1}{\mu}}$$

Appelons $\mathcal{M}$ l'un des trois modes de majoration de Y_n considérés plus haut, et supposons que : $Y_n \underset{\mathcal{M}}{<} B(n)$.

On a alors : $Y_n \underset{\mathcal{M}}{<} \varepsilon B(n)$, aussi petit que soit $\varepsilon > 0$.

En effet, si l'on pose : $B_1(n) = \varepsilon B(n)$, il vient : $B_1^{-1}(t) \sim \left(\frac{t}{\varepsilon k}\right)^{\frac{1}{\mu}}$ et l'on voit immédiatement que si $B^{-1}(t)$ vérifie la condition du corollaire 3, ou du théorème 7, ou du théorème 10, il en va de même pour $B_1^{-1}(t)$.

Mais la relation : $Y_n \underset{\mathcal{M}}{<} \varepsilon B(n)$ pour tout $\varepsilon > 0$

équivaut à : $\frac{Y_n}{B(n)} \xrightarrow{\mathcal{M}} 0$

En résumé, on voit que pour la famille de fonctions $B(n)$ considérée, la condition : $Y_n \underset{\mathcal{M}}{<} B(n)$ entraîne : $\frac{Y_n}{B(n)} \xrightarrow{\mathcal{M}} 0$.

2/ - Il est facile d'étendre la famille des fonctions $B(n)$ douées de la propriété ci-dessus.

Si $t = B(x)$ on a : $x = B^{-1}(t)$

et si $t = \varepsilon B(x) = B_1(x)$, $x = B^{-1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = B_1^{-1}(t)$

Pour que $B(x)$ possède la propriété, il suffit que $\frac{B^{-1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)}{B^{-1}(t)}$ soit majoré quand t varie de 0 à $+\infty$, et cela pour tout $\varepsilon > 0$.

D'ailleurs, il suffit que le rapport introduit soit majoré pour une valeur donnée de ε (< 1), par exemple, $\varepsilon = 1/2$ pour que cela soit vrai quel que soit ε .

En effet, si : $\frac{B^{-1}(2t)}{B^{-1}(t)} \wedge$

il existe un entier m tel que $\varepsilon > 2^{-m}$ et l'on a :

$$\frac{B^{-1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)}{B^{-1}(t)} < \frac{B^{-1}(2^m t)}{B^{-1}(t)} = \frac{B^{-1}(2^m t)}{B^{-1}(2^{m-1} t)} \cdot \frac{B^{-1}(2^{m-1} t)}{B^{-1}(2^{m-2} t)} \cdots \frac{B^{-1}(2t)}{B^{-1}(t)} < \Lambda^m$$

Remarque.

En prenant $B(n) = n$, on retrouverait les résultats obtenus par M. Dugué (Cf I et II).

CHAPITRE II

ÉTUDE DE LA STABILITÉ EN PROBABILITÉ DES VALEURS EXTRÊMES D'UN ÉCHANTILLON

A - VARIABLES ALEATOIRES STABLES EN PROBABILITE -

I - DEFINITION ET PREMIERES PROPRIETES -

1/ - Une suite infinie de v. a. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ est dite stable en probabilité s'il existe une suite certaine $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ telle que $(X_n - a_n)$ converge en probabilité vers 0.

Remarquons que $(X_n - a_n)$ converge alors en loi vers 0. Réciproquement, si $(X_n - a_n)$ converge en loi vers 0, elle converge aussi en probabilité vers 0 et la suite (X_n) est stable en probabilité. Les liaisons pouvant exister entre les variables X_n ne jouent donc aucun rôle dans la stabilité de cette suite.

Il résulte immédiatement de la définition précédente que si une suite stable (X_n) converge en loi vers une limite, cette limite est presque certaine (Quand il n'y aura pas d'ambiguïté à craindre, nous dirons "stable" au lieu de "stable en proba").

2/ - La stabilité en probabilité d'une suite (X_n) s'exprime aisément à l'aide de la fonction de concentration de la v. a. X_n ou de sa fonction de dispersion. Rappelons d'abord les définitions de ces deux fonctions, qui furent introduites par M. Paul Lévy (I p. 43-44).

a) La fonction de concentration $Q(l)$ d'une loi $F(x)$ est le maximum de la probabilité des segments de longueur l :

$$Q(l) = \text{Max}_{(x)} \{ F(x + l + 0) - F(x) \}$$

Ce maximum est toujours atteint, même si $F(x)$ est discontinue, c'est-à-dire que parmi les segments de x 's dont la longueur l est donnée, il en existe toujours un au moins qui a une probabilité maximum.

b) La fonction de dispersion $\omega(\alpha)$ est le minimum de la lon-

gueur des segments dont la probabilité est au moins égale à α . Ce minimum est toujours atteint, c'est-à-dire que parmi les segments de $x'x$ dont la probabilité est supérieure ou égale à α il en existe toujours un au moins qui a une longueur minimum.

Si $Q(l)$ est continue et strictement croissante, $\omega(\alpha)$ est sa fonction inverse. Mais si $Q(l)$ est discontinue, ou présente des paliers horizontaux, la relation entre $\omega(\alpha)$ et $Q(l)$ est un peu moins simple.

3/ - THEOREME 13 -

Pour qu'une suite de v. a. X_n soit stable en probabilité, il faut et il suffit que $Q_n(l) \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow \infty$ quel que soit $l > 0$.

Démonstration.

En effet, si (X_n) est stable :

$$F_n(a_n + \frac{1}{2}) - F_n(a_n - \frac{1}{2}) \rightarrow 1 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

quel que soit $l > 0$.

$$\text{Or :} \quad Q_n(l) \geq F_n(a_n + \frac{1}{2}) - F_n(a_n - \frac{1}{2})$$

$$\text{et par suite :} \quad Q_n(l) \rightarrow 1 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

Réciproquement, supposons cette propriété vérifiée pour tout $l > 0$; on peut alors définir une suite de segments S_n dont la longueur tend vers 0 et dont la probabilité tend vers 1, ce qui entraîne la stabilité de (X_n) .

4/ - THEOREME 14 -

Pour que (X_n) soit stable en probabilité, il faut et il suffit que $\omega_n(\alpha) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ quelle que soit la probabilité $\alpha > 0$.

Démonstration.

Si la suite (X_n) est stable, on peut associer à tout nombre positif ε un entier N tel que l'inégalité $n > N$ entraîne :

$$\Pr \{ |X_n - a_n| < \varepsilon \} > \alpha$$

$$\text{et à fortiori :} \quad \omega_n(\alpha) < 2\varepsilon$$

Réciproquement, si $\omega_n(\alpha) \rightarrow 0$ pour tout $\alpha > 0$, on peut définir une suite de segments S_n dont la longueur tend vers 0 et dont la probabilité tend vers 1, ce qui prouve que (X_n) est stable.

Avant d'énoncer quelques autres propriétés des suites de v. a. stables, il ne sera peut-être pas inutile de préciser ce que nous entendons par "fonction inverse d'une fonction de répartition".

II - INVERSION D'UNE f. d. r. ; APPLICATION A LA STABILITE -

1/ - Définition.

Etant donné un nombre y de l'intervalle $]0, 1[$ nous appellerons $x = F^{-1}(y)$ la borne supérieure des nombres ξ tels que : $F(\xi) < y$.

En vertu de la continuité à gauche de $F(x)$, on a : $F(x) \leq y$; d'autre part, il résulte de la définition même de $x = F^{-1}(y)$ que : $F(x + 0) \geq y$.

Quel que soit $h > 0$, on peut écrire :

$$F(x - h) < y ; \quad F(x + h) \geq y$$

Cela caractérise d'ailleurs la valeur $x = F^{-1}(y)$.

2/ - Propriétés.

a) $F^{-1}(y)$ est monotone non décroissante.

Si $F(x)$ est continue, $F^{-1}(y)$ est strictement croissante et réciproquement. Si $F^{-1}(y)$ est continue, $F(x)$ est strictement croissante et réciproquement.

b) $F^{-1}(y)$ est continue à gauche.

Pour le voir, posons $\xi = F^{-1}(y - h)$, avec $h > 0$.

On a : $F(\xi + 0) \geq y - h$

Quand $h \rightarrow 0$, ξ a une limite ξ_1 vérifiant :

$$F(\xi_1 + 0) \geq y \quad \text{et} \quad \xi_1 \leq x.$$

Si l'on avait $\xi_1 < x$, on aurait $F(\xi_1 + 0) < y$, ce qui est impossible.

Par suite : $\xi_1 = x$, ou : $\lim_{h \rightarrow 0} F^{-1}(y - h) = F^{-1}(y)$

c) Si l'on considère une variable Y répartie uniformément entre 0 et 1 et si l'on en déduit une variable X en posant $X = F^{-1}(Y)$, la f. d. r. de X est $F(x)$. En effet :

$$\Pr \{ X < x \} = \Pr \{ F^{-1}(Y) < x \}$$

Or, l'inégalité : $F^{-1}(Y) < x$ entraîne : $Y < F(x)$, tandis que $Y < F(x)$ entraîne : $F^{-1}(Y) < x$.

En remarquant que $\Pr \{ Y = F(x) \} = 0$, on en déduit :

$$\Pr \{ X < x \} = \Pr \{ Y < F(x) \} = F(x)$$

THEOREME 15 -

Soit une suite de v. a. X_n ayant pour f. d. r. $F_n(x)$. Pour que cette suite soit stable, il faut et il suffit que :

$$F_n^{-1}(b) - F_n^{-1}(a) \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

quelles que soient les constantes a et b vérifiant :

$$0 < a < b < 1$$

Condition nécessaire.

S'il y a stabilité, il existe une suite certaine (a_n) telle que $X_n - a_n \xrightarrow{p} 0$.

Aussi petit que soit le nombre positif ε , on peut alors choisir n assez grand pour que :

$$F_n(a_n - \varepsilon) < a \quad ; \quad F_n(a_n + \varepsilon) > b$$

On en déduit : $a_n - \varepsilon \leq F_n^{-1}(a) \quad ; \quad a_n + \varepsilon > F_n^{-1}(b)$

Donc : $0 \leq F_n^{-1}(b) - F_n^{-1}(a) < \varepsilon$

Condition suffisante.

Si $F_n(x)$ satisfait la condition indiquée il en résulte que :

$$F_n^{-1}(1 - \varepsilon) - F_n^{-1}(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

On peut alors trouver une suite ε_n dont le terme général décroît et tend vers 0 avec $1/n$, et qui soit telle que :

$$F_n^{-1}(1 - \varepsilon_n) - F_n^{-1}(\varepsilon_n) \rightarrow 0 \quad \text{avec } 1/n.$$

En posant : $F_n^{-1}(\varepsilon_n) = a_n$ et $F_n^{-1}(1 - \varepsilon_n) = b_n$, on a :

$$F(a_n) \leq \varepsilon_n \quad \text{et} \quad F_n(b_n + 0) \geq 1 - \varepsilon_n$$

ce qui, compte tenu du fait que $b_n - a_n \rightarrow 0$, prouve que $X_n - a_n \xrightarrow{p} 0$.

4/ - THEOREME 16 -

Pour que (X_n) soit stable, il faut et il suffit que, quel que soit le nombre certain $a \in]0, 1[$ l'on ait :

$$F_n^{-1}(a) - X_n \xrightarrow{p} 0$$

Démonstration.

La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est vérifiée s'il existe une suite certaine (a_n) telle que $X_n - a_n \xrightarrow{p} 0$. A tout nombre $\varepsilon > 0$, il correspond alors un entier N tel que l'inégalité $n > N$ entraîne :

$$F_n(a_n - \varepsilon) < a \quad ; \quad F_n(a_n + \varepsilon) > a$$

$$\text{d'où :} \quad a_n - \varepsilon < F_n^{-1}(a) \quad ; \quad a_n + \varepsilon \geq F_n^{-1}(a)$$

Finalement on a :

$$|F_n^{-1}(a) - a_n| < \varepsilon \quad \text{pour } n > N$$

5/ - Corollaire 16.

Considérons une suite certaine (a_n) , telle que $\bar{a}_n < 1$ et $\underline{a}_n > 0$ ($\bar{a}_n$ et $\underline{a}_n$ étant respectivement la plus grande et la plus petite limite de la suite).

Dans ces conditions (X_n) sera stable si et seulement si :

$$F_n^{-1}(a_n) - X_n \xrightarrow{p} 0.$$

Démonstration.

En effet, si cette relation est vérifiée, (X_n) est stable. Réciproquement, supposons que (X_n) soit stable. Il existe un nombre fixe N tel que $n > N$ entraîne :

$$a < a_n < b$$

$$\text{avec :} \quad 0 < a < b < 1$$

$$\text{On en déduit :} \quad F_n^{-1}(a) \leq F_n^{-1}(a_n) \leq F_n^{-1}(b)$$

Or quand $n \rightarrow \infty$, $X_n - F_n^{-1}(a) \xrightarrow{p} 0$ d'après le théorème 16 et $F_n^{-1}(b) - F_n^{-1}(a) \rightarrow 0$ d'après le théorème 15.

En fin de compte, il s'avère exact que $X_n - F_n^{-1}(a_n) \xrightarrow[p]{} 0$.

6/ - Afin de pouvoir effectuer certaines démonstrations par l'absurde, nous allons donner ici quelques indications sur la non-stabilité en probabilité d'une suite aléatoire X_n .

On peut obtenir des propriétés caractéristiques de la non-stabilité en prenant le contre-pied des propriétés caractéristiques de la stabilité qui ont été énoncées plus haut.

Par exemple (contraire du théorème 15) : Pour que X_n ne soit pas stable, il faut et il suffit qu'il existe deux constantes a et b de l'intervalle $]0, 1[$ et une suite infinie d'entiers positifs N telles que :

$$| F_n^{-1}(b) - F_n^{-1}(a) | \geq l > 0 \quad \text{pour } n \in N$$

l étant une longueur fixe.

Indiquons maintenant une propriété caractéristique moins immédiate, mais qui nous fut plusieurs fois utile.

THEOREME 17 -

Soit une suite de v. a. X_n , ayant pour f. d. r. $F_n(x)$. Pour qu'elle ne soit pas stable, il faut et il suffit qu'il existe un nombre positif d et une suite certaine ξ_n , définie pour des valeurs de n formant une suite infinie N , tels que :

$$0 < p \leq F_n(\xi_n) \quad ; \quad 0 < q \leq 1 - F_n(\xi_n + d)$$

p et q étant deux constantes.

Condition suffisante.

Si $x \leq \xi_n$, on a :

$$F_n(x + d) - F_n(x) \leq F_n(\xi_n + d) \leq 1 - q$$

Si $x_n > \xi_n$:

$$F_n(x + d) - F_n(x) \leq 1 - F_n(\xi_n) \leq 1 - p$$

Il en résulte : $Q_n(d) \leq \text{Max} \{ 1 - p, 1 - q \}$ pour tout $n \in N$ ce qui entraîne l'instabilité de X_n .

Condition nécessaire.

Supposons X_n instable. Il existe alors deux constantes a et b (vérifiant $0 < a < b < 1$) et un nombre positif l tels que, pour une suite infinie N de valeurs de n , on ait :

$$\bar{F}_n^{-1}(b) - F_n^{-1}(a) \geq l$$

Posons alors : $F_n^{-1}(a) + \frac{1}{4} = \xi_n$. On peut écrire :

$$F_n(\xi_n) \geq a \quad \text{et} \quad F_n(\xi_n + \frac{1}{2}) \leq F_n[F_n^{-1}(b)] \leq b$$

En prenant $d = \frac{1}{2}$, on voit que la suite ξ_n , définie pour tout $n \in N$, vérifie bien les deux conditions :

$$F_n(\xi_n) \geq a \quad ; \quad 1 - F_n(\xi_n + d) \geq 1 - b$$

III - STABILITE D'UNE SOMME DE VARIABLES ALEATOIRES -

1/- THEOREME 18 -

Si deux variables X_n et Y_n sont stables en probabilité, leur somme Z_n l'est aussi.

Démonstration.

Soit a_n et b_n deux suites certaines telles que :

$$X_n - a_n \xrightarrow{p} 0 \quad \text{et} \quad Y_n - b_n \xrightarrow{p} 0$$

A tout nombre $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il correspond un entier N tel que, pour $n > N$:

$$\Pr \{ |X_n - a_n| < \varepsilon \} > 1 - \varepsilon \quad \text{et} \quad \Pr \{ |Y_n - b_n| < \varepsilon \} > 1 - \varepsilon$$

$$\text{On a alors :} \quad \Pr \{ |Z_n - a_n - b_n| > 2\varepsilon \} < 2\varepsilon$$

ce qui montre que $Z_n - a_n - b_n \xrightarrow{p} 0$.

2/- THEOREME 19 -

Si la somme Z_n de deux v. a. indépendantes X_n et Y_n est stable en probabilité, chacune de ces deux variables est stable.

1ère démonstration.

Soit $\omega_n(\alpha)$ la fonction de dispersion de Z_n ; $\omega_n(\alpha) \rightarrow 0$ avec $1/n$ quel

que soit α . Appelons $\omega_n'(\alpha)$ la fonction de dispersion de X_n . D'après un théorème de M. Paul Lévy (I, p. 90) l'on a, par suite de l'indépendance de X_n et de Y_n :

$$\omega_n(\alpha) > \omega_n'(\alpha)$$

Donc $\omega_n'(\alpha) \rightarrow 0$, ce qui entraîne la stabilité de X_n . Enfin, on voit de même que Y_n est stable.

Cette démonstration a l'inconvénient de ne pas s'étendre au cas où l'indépendance de X_n et Y_n n'est pas actuelle, mais asymptotique (la notion d'indépendance asymptotique étant d'autre part convenablement précisée).

Nous allons donc donner une seconde démonstration, qui peut s'appliquer au cas de l'indépendance asymptotique moyennant une très petite modification.

2ème démonstration.

Soit $Z_n = X_n + Y_n$. Puisque Z_n est stable si l'une des variables X_n , Y_n est stable, l'autre l'est aussi.

Supposons alors que X_n et Y_n soient toutes deux instables, et appelons $F_n(x)$ la f. d. r. de X_n . L'instabilité de Y_n peut se caractériser en disant qu'il existe un nombre positif l et une suite infinie de valeurs de n , soit N , tels que :

$$\Pr \{ |Y_n + a| > l \} > k > 0 \quad \text{pour } n \in N$$

quelle que soit la variable certaine a , k désignant une constante.

D'autre part :

$$\Pr \{ |X_n + Y_n + a| > l \} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pr \{ |Y_n + x + a| > l \mid X_n = x \} dF_n(x)$$

Puisque Y_n est indépendant de X_n :

$$\Pr \{ |Y_n + x + a| > l \mid X_n = x \} = \Pr \{ |Y_n + x + a| > l \} > k$$

On en déduit : $\Pr \{ |X_n + Y_n + a| > l \} > k$ pour $n \in N$

quel que soit a , ce qui prouve que Z_n est instable.

3/- Corollaire 19.

Associons à chaque variable X_n d'une suite aléatoire la variable X'_n , indépendante de X_n et de même loi.

Pour que (X_n) soit stable en probabilité, il faut et il suffit que :

$$X_n - X'_n \xrightarrow{p} 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty$$

Démonstration.

Effectivement, si cette condition est réalisée, X_n et X'_n sont stables d'après le théorème 18.

Réciproquement, si X_n est stable, il existe une suite certaine a_n telle que :

$$X_n - a_n \xrightarrow{p} 0 \quad \text{et} \quad X'_n - a_n \xrightarrow{p} 0$$

d'où :
$$X_n - X'_n \xrightarrow{p} 0$$

4/- Corollaire 19'.

Soit $\varphi_n(t)$ la fonction caractéristique de X_n . Pour que la suite (X_n) soit stable, il faut et il suffit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi_n(t)| = 1 \quad \text{pour toute valeur de } t.$$

Condition nécessaire.

Si (X_n) est stable, on peut écrire :

$$X_n = a_n + U_n$$

où a_n est un nombre certain et U_n une v. a. qui tend vers 0 en probabilité. On a :

$$\varphi_n(t) = e^{it a_n} \varphi_{U_n}(t)$$

donc :
$$|\varphi_n(t)| = |\varphi_{U_n}(t)|$$

Quand $n \longrightarrow \infty$, $\varphi_{U_n}(t) \longrightarrow 1$ pour toute valeur de t ; il en résulte que : $|\varphi_n(t)| \longrightarrow 1$ dans les mêmes conditions.

Condition suffisante.

Supposons X_n tel que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi_n(t)| = 1$$

pour tout t . Associons à X_n une variable X'_n , indépendante et de même loi, et posons :

$$Z_n = X_n - X'_n$$

On a : $\varphi_{Z_n}(t) = \varphi_n(t) \cdot \overline{\varphi_n(t)} = |\varphi_n(t)|^2$

Ainsi, $\varphi_{Z_n}(t) \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow \infty$, donc $Z_n \xrightarrow{p} 0$

On peut en conclure que X_n est stable, d'après le corollaire 19.

B - STABILITE EN PROBABILITE DES VALEURS EXTREMES D'UN ECHANTILLON -

IV - ETUDE DE LA STABILITE EN PROBABILITE DE Y_n -

1/- Lemme 20.

La f. d. r. de la plus grande valeur Y_n d'un échantillon étant :

$$F_n(x) = F^n(x),$$

on a : $F_n^{-1}(y) = F^{-1}(y^{\frac{1}{n}})$ quel que soit $y \in]0, 1[$.

Démonstration.

En effet, si $x = F_n^{-1}(y)$, cela équivaut à :

$$[F(x+h)]^n \geq y \text{ et } [F(x-h)]^n < y \text{ pour tout } h > 0,$$

ou encore : $F(x+h) \geq y^{\frac{1}{n}} \text{ et } F(x-h) < y^{\frac{1}{n}}$

Il résulte de ces deux dernières inégalités que $x = F^{-1}(y^{\frac{1}{n}})$.

2/- THEOREME 20 -

Pour que Y_n soit stable, il faut et il suffit que :

$$F^{-1}(1 - \frac{\alpha}{n}) - F^{-1}(1 - \frac{\beta}{n}) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

quels que soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ ($\alpha < \beta$)

Condition nécessaire.

On peut toujours choisir deux nombres a et b tels que :

$$e^{-a} < a < 1 \text{ et } e^{-b} < b < e^{-a}$$

Quand n est suffisamment grand on a :

$$(1 - \frac{\alpha}{n})^n < a \text{ et } b < (1 - \frac{\beta}{n})^n$$

Donc :

$$0 \leq F_n^{-1} \left[\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n \right] - F_n^{-1} \left[\left(1 - \frac{\beta}{n}\right)^n \right] \leq F_n^{-1}(a) - F_n^{-1}(b)$$

Or, si Y_n est stable, $F_n^{-1}(a) - F_n^{-1}(b) \rightarrow 0$, avec $1/n$, et par suite :

$$F_n^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n - F_n^{-1} \left(1 - \frac{\beta}{n}\right)^n \rightarrow 0$$

ce qui, d'après le lemme précédent, équivaut à :

$$F^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) - F^{-1} \left(1 - \frac{\beta}{n}\right) \rightarrow 0$$

Condition suffisante.

Soit a et b deux nombres quelconques de l'intervalle $]0, 1[$, a étant par exemple le plus grand des deux : Il s'agit de prouver que :

$$F_n^{-1}(a) - F_n^{-1}(b) \rightarrow 0 \text{ avec } 1/n.$$

Choisissons deux nombres positifs α et β , vérifiant les conditions :

$$a < e^{-\alpha} ; \quad e^{-\beta} < b$$

Pour n assez grand, on a :

$$a < \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n ; \quad \left(1 - \frac{\beta}{n}\right)^n < b$$

Donc :

$$0 < F_n^{-1}(a) - F_n^{-1}(b) \leq F_n^{-1} \left[\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n \right] - F_n^{-1} \left[\left(1 - \frac{\beta}{n}\right)^n \right]$$

La dernière expression est identique à $F^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) - F^{-1} \left(1 - \frac{\beta}{n}\right)$ et ceci tend vers 0 avec $1/n$ par hypothèse. Il en résulte bien que :

$$F_n^{-1}(a) - F_n^{-1}(b) \rightarrow 0 \text{ avec } 1/n.$$

3/- Remarques.

a) Précédemment, nous avons associé à toute f. d. r. $F(x)$ la fonction $G(x) = 1 - F(x)$. De même, il sera commode de poser :

$$G^{-1}(t) = F^{-1}(1 - t)$$

Si $G(x)$ a une fonction inverse au sens usuel de ce terme, elle coïncide avec $G^{-1}(t)$. Sinon, il est facile de voir que l'égalité $x = G^{-1}(t)$ entraîne :

$$G(x + 0) \leq t \leq G(x).$$

Pour que Y_n soit stable, il faut et il suffit que :

$$G^{-1}\left(\frac{\alpha}{n}\right) - G^{-1}\left(\frac{\beta}{n}\right) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

quels que soient α et β positifs.

b) Si Y_n est stable, on a :

$$F^{-1}\left(1 - \frac{a}{n}\right) - Y_n \xrightarrow{p} 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty,$$

quel que soit $a > 0$.

Cela résulte immédiatement du fait que :

$$F^{-1}\left(1 - \frac{a}{n}\right) = F_n^{-1}\left[\left(1 - \frac{a}{n}\right)^n\right] = F_n^{-1}(e^{-a}) + \varepsilon_n \quad (\varepsilon_n \rightarrow 0 \text{ avec } 1/n)$$

4/- Lemme 21.

La condition : $F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) - F^{-1}\left(1 - \frac{\beta}{n}\right) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ quels que soient α et β positifs équivaut à :

$$F^{-1}(1 - \alpha t) - F^{-1}(1 - \beta t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow 0$$

la variable t étant continue.

Démonstration.

Si la 2ème condition est satisfaite, la 1ère l'est évidemment aussi. Etablissons la réciproque, en supposant par exemple $\alpha < \beta$. Soit n la partie entière de $1/t$. On a :

$$n \leq 1/t < n+1$$

$$\text{donc :} \quad 1/(n+1) < t \leq 1/n$$

$$\text{et} \quad 1 - \alpha t < 1 - \frac{\alpha}{n+1} \quad ; \quad 1 - \beta t \geq 1 - \frac{\beta}{n}$$

Or, on peut toujours trouver une constante α' telle que, pour n assez grand, l'on ait :

$$1 - \frac{\alpha}{n+1} < 1 - \frac{\alpha'}{n}$$

On peut alors écrire :

$$1 - \alpha t < 1 - \frac{\alpha'}{n} \quad ; \quad 1 - \frac{\beta}{n} \leq 1 - \beta t$$

d'où :

$$0 \leq F^{-1}(1 - \alpha t) - F^{-1}(1 - \beta t) \leq F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha'}{n}\right) - F^{-1}\left(1 - \frac{\beta}{n}\right)$$

Quand $t \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, et la quantité positive :

$$F^{-1}(1 - \alpha t) - F^{-1}(1 - \beta t)$$

est majorée par une quantité qui tend vers 0 ; elle tend donc bien vers 0 .

5/ - THEOREME 21 -

Y_n est stable en probabilité si et seulement s'il existe une constante positive $k \neq 1$ telle que :

$$G^{-1}(t) - G^{-1}(kt) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow 0.$$

Démonstration.

a) Soit k une constante positive donnée, et supposons Y_n stable. D'après le théorème 20 :

$$G^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) - G^{-1}\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow 0 \text{ avec } 1/n \text{ donc, d'après le lemme 21 :}$$

$$G^{-1}(t) - G^{-1}(kt) \rightarrow 0 \text{ avec } t$$

b) Supposons maintenant que, pour une certaine valeur positive de $k \neq 1$ que l'on peut prendre supérieure à 1, on ait :

$$G^{-1}(t) - G^{-1}(kt) \rightarrow 0 \text{ avec } t$$

Si $k' < k$, on a aussi :

$$G^{-1}(t) - G^{-1}(k't) \rightarrow 0$$

car $G^{-1}(t)$ est une fonction non croissante de t .

D'autre part, on voit que :

$$G^{-1}(t) - G^{-1}(k^2 t) \rightarrow 0 \text{ avec } t$$

en écrivant :

$$G^{-1}(t) - G^{-1}(k^2 t) = [G^{-1}(t) - G^{-1}(kt)] + [G^{-1}(kt) - G^{-1}(k't)]$$

Il en résulte immédiatement que :

$$G^{-1}(t) - G^{-1}(k't) \rightarrow 0$$

quel que soit k' , donc que :

$$G^{-1}(\alpha t) - G^{-1}(\beta t) \rightarrow 0 \text{ avec } t$$

quels que soient les nombres positifs α et β .

Le théorème 20 nous dit alors que Y_n est stable.

6/ - Application aux lois discontinues.

Supposons que, pour x assez grand, les valeurs possibles de X puissent être ordonnées en une suite croissante : $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ les probabilités respectives de ces valeurs étant $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$. Pour que Y_n puisse être stable, il faut que $x_{j+1} - x_j \rightarrow 0$ quand $j \rightarrow \infty$.

En effet, si l'on pose :

$$1 - \tau_n = \sum_{j=n}^{\infty} p_j$$

$$\text{on a : } F^{-1}(1 - \tau_n) = x_n ; \quad F^{-1}(1 - \alpha \tau_n) \geq x_{n+1} \quad (\alpha < 1)$$

$$\text{Donc : } F^{-1}(1 - \alpha \tau_n) - F^{-1}(1 - \tau_n) \geq x_{n+1} - x_n$$

Si Y_n est stable, le premier membre tend vers 0, donc $x_{n+1} - x_n$ également.

V - UN THEOREME DE GNEDENKO -

1/ - La condition de stabilité du théorème 21 porte sur la fonction inverse de $G(x)$. Il est logique de la transformer en une condition portant sur $G(x)$.

Nous avons vu, lors de la démonstration du théorème 21, que si : $G^{-1}(t) - G^{-1}(kt) \rightarrow 0$ avec t pour une certaine valeur de k ($\neq 1$), cela est vrai quel que soit k . Il existe alors une fonction $\chi(t)$ satisfaisant à :

$$G^{-1}(t) - G^{-1}(\chi t) \rightarrow 0 \text{ avec } t \quad (1)$$

$$\chi(t) \rightarrow +\infty \text{ avec } 1/t \quad (2)$$

$$\text{Posons : } G^{-1}(t) = x \quad \text{et} \quad G^{-1}(\chi t) = x - \epsilon(x)$$

D'après la condition (1), $\epsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \infty$

$$\text{On a : } G(x + 0) \leq t \leq G(x) \quad (3)$$

$$G(x - \epsilon + 0) \leq \chi t \leq G(x - \epsilon) \quad (4)$$

$$\text{Donc : } \frac{G(x + 0)}{G(x - \epsilon)} \leq \frac{1}{\chi(t)}$$

$$\text{et d'après la condition (2) : } \frac{G(x + 0)}{G(x - \epsilon)} \rightarrow 0 \text{ avec } 1/x.$$

Puisque ϵ converge vers 0 quand $x \rightarrow \infty$, on peut écrire :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{G(x)}{G(x-h)} = 0 \quad (5)$$

quelle que soit la constante $h > 0$

Réciproquement, supposons que cette condition (5) soit satisfaite. Il existe alors une fonction $\epsilon(x)$ tendant vers 0 avec $1/x$, et telle que :

$$\frac{G(x)}{G(x - \epsilon + 0)} \rightarrow 0 \quad \text{avec } 1/x.$$

Posons : $x = G^{-1}(t)$ et $x - \epsilon = G^{-1}(\chi t)$

D'après les inégalités (3) et (4) :

$$\frac{1}{\chi(t)} \leq \frac{G(x)}{G(x - \epsilon + 0)} \rightarrow 0 \quad \text{avec } 1/x.$$

Quand $t \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$, et par suite : $\frac{1}{\chi(t)} \rightarrow 0$

De plus, on a :

$$G^{-1}(t) - G^{-1}(\chi t) = \epsilon(x) \rightarrow 0 \quad \text{avec } t,$$

ce qui entraîne la stabilité de Y_n . Enonçons le résultat obtenu :

THEOREME 22 (Gnedenko) -

La plus grande valeur Y_n d'un échantillon est stable en probabilité si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{G(x)}{G(x-h)} = 0$$

quelle que soit la constante positive h .

2/ - Un résultat présentant quelque analogie avec celui-ci, mais moins précis et moins général, avait d'abord été donné par Von Mises. Dans un article publié en 1943, Gnedenko mit en relief l'importance de la stabilité de Y_n à propos de la recherche de la loi limite de cette variable. La démonstration originale de Gnedenko diffère de la nôtre. Nous croyons intéressant de l'exposer ici.

a) Condition nécessaire.

Dire que Y_n est stable, cela revient à dire qu'il existe une suite certaine a_n telle que, pour tout :

$$\varepsilon > 0 : F^n(a_n + \varepsilon) \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad F^n(a_n - \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{avec} \quad 1/n. \quad (6)$$

Puisque $F^{n+1}(a_n - \varepsilon) < F^n(a_n - \varepsilon)$, il n'y a aucun inconvénient à supposer que a_n est monotone croissante.

En prenant le logarithme des deux membres de chacune des relations (6) on les transforme en :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n G(a_n + \varepsilon)] = 0 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [n G(a_n - \varepsilon)] = \infty \quad (7)$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

A tout nombre t on peut associer un terme a_n tel que :

$$a_n \leq t < a_{n+1}$$

$$\text{On a alors :} \quad G(a_n + \varepsilon) \geq G(t + \varepsilon) \geq G(a_{n+1} - \varepsilon)$$

$$G(a_{n+1} - \varepsilon) \geq G(t - \varepsilon) \geq G(a_n - \varepsilon)$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{G(a_{n+1} + \varepsilon)}{G(a_n - \varepsilon)} \leq \frac{G(t + \varepsilon)}{G(t - \varepsilon)} \leq \frac{G(a_n + \varepsilon)}{G(a_{n+1} - \varepsilon)}$$

Quand $t \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, et les inégalités précédentes impliquent, compte tenu des relations (7) :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{G(t - \varepsilon)}{G(t + \varepsilon)} = 0$$

En posant $t + \varepsilon = x$ et $t - \varepsilon = x - h$, on retrouve bien la condition du théorème 22.

b) Condition suffisante.

Supposons la propriété ci-dessus vérifiée, et définissons une suite monotone non décroissante a_n par

$$a_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\text{On a :} \quad G(a_n + 0) < 1/n \quad ; \quad G(a_n - 0) > 1/n.$$

$$\text{On peut écrire :} \quad \frac{G(a_n + \varepsilon)}{G(a_n + 0)} < \frac{G(a_n + \varepsilon)}{G(a_n + \frac{\varepsilon}{2})} \rightarrow 0 \quad \text{avec} \quad 1/n.$$

ce qui entraîne : $n G(a_n + \varepsilon) \rightarrow 0$.

On établirait de même la deuxième relation (7) et de ces deux relations, vraies quel que soit ε , on conclut à la stabilité de Y_n .

Remarque.

Le théorème de Gnedenko fournit une condition de stabilité qui met en jeu un paramètre continu h tandis que, dans notre théorème 21, nous pouvons supprimer tout paramètre et écrire la condition :

$$G^{-1}(t) - G^{-1}(2t) \rightarrow 0 \text{ avec } 1/t.$$

3/ - Notation.

Il sera commode d'appeler $\mathcal{T}$ la famille des fonctions de répartition pour lesquelles la plus grande valeur Y_n est stable en probabilité. Indiquons une propriété de cette famille qui résulte immédiatement du théorème de Gnedenko :

THEOREME 23 -

Si $F(x) \in \mathcal{T}$, l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} x^k dF(x) \text{ existe pour toute valeur de } k > 0.$$

Démonstration.

Pour le voir, il suffit d'écrire :

$$\int_n^{n+1} x^k dF(x) < (n+1)^k [G(n) - G(n+1)] \sim (n+1)^k G(n)$$

La série de terme général $u_n = (n+1)^k G(n)$ est convergente, car $u_{n+1} / u_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, et cela assure l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^k dF(x)$. La réciproque de ce théorème est inexacte ; on la met en défaut avec une loi de Poisson, puisqu'une telle loi ne vérifie pas la condition donnée au § IV, n° 6.

VI - GENERATION DES FONCTIONS DE LA FAMILLE - $\mathcal{T}$ -

1/ - Nous allons d'abord dégager une sous-famille importante de $\mathcal{T}$, déjà obtenue par M. Von Mises.

THEOREME 24 -

Soit $f, d, r, F(x)$ ayant, au moins pour x assez grand, une dérivée $f(x)$. $F(x) \in \mathcal{T}$ si :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{1 - F(x)} = +\infty$$

Démonstration.

Posons : $W(x) = -\text{Log } G(x)$. D'après le théorème 22, la stabilité de Y_n équivaut à :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [W(x) - W(x-h)] = +\infty \quad (8)$$

quel que soit $h > 0$.

La fonction $W(x)$ est monotone et croît indéfiniment avec x ; elle a une dérivée pour les grandes valeurs de x , et l'on peut appliquer la formule des accroissements finis :

$$W(x) - W(x-h) = h W'(\xi) \quad \text{avec} \quad x-h < \xi < x$$

La condition (8) est évidemment satisfaite si $W'(x) \rightarrow +\infty$ avec x , ce qui établit le théorème car $W'(x) = \frac{f(x)}{G(x)}$

Nous appellerons $\mathcal{T}_1$ la sous-famille de $\mathcal{T}$ formée par les lois vérifiant la condition du théorème 24.

2/ - Il est facile de préciser la relation qui existe entre $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}$. Pour abréger, nous dirons :

a) Qu'une suite x_n est du type $\mathcal{S}$ si elle est monotone croissante, et que $x_n \rightarrow +\infty$ avec n , tandis que $x_{n+1} - x_n \rightarrow 0$.

b) Qu'une fonction $F(x)$ est associée à une fonction $F_1(x)$ si elle prend la même valeur pour une infinité de valeurs de x formant une suite x_n du type $\mathcal{S}$.

On peut alors énoncer le théorème suivant :

THEOREME 25 -

Si la f. d. r. $F_1(x)$ appartient à $\mathcal{T}_1$, toute f. d. r. associée $F(x)$ appartient à $\mathcal{T}$.

Réciproquement, à toute f. d. r. $F(x)$ de $\mathcal{T}$, on peut associer une f. d. r. $F_1(x)$ appartenant à $\mathcal{T}_1$.

a) Propriété directe.

Soit une f. d. r. $F_1(x) \in \mathcal{T}_1$. Si l'on pose, comme plus haut :

$$W_1(x) = -\text{Log} [1 - F_1(x)],$$

nous savons que :

$$W_1'(x) \rightarrow +\infty \text{ quand } x \rightarrow +\infty$$

La f. d. r. $F(x)$ étant associée à $F_1(x)$, il s'agit d'établir que, quelle que soit la constante $h > 0$, on a :

$$W(x) - W(x - h) \rightarrow +\infty \text{ avec } x. \quad (9)$$

Puisque $x_{n+1} - x_n \rightarrow 0$ avec $1/n$, il existe quand x est assez grand, deux indices p et q tels que :

$$x_{p-1} < x - h \leq x_p < x_q \leq x < x_{q+1}$$

On a alors :

$$W(x) - W(x - h) \geq W(x_q) - W(x_p) = W_1(x_q) - W_1(x_p)$$

Or, quand $x \rightarrow \infty$, $x_q - x_p \rightarrow h$, et :

$$W_1(x_q) - W_1(x_p) \sim h W_1'(\xi) \rightarrow +\infty$$

d'où la relation (9).

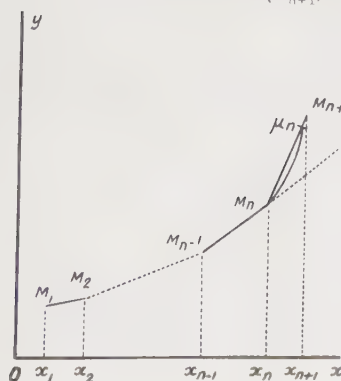
b) Réciproque.

Considérons une f. d. r. $F(x) \in \mathcal{F}$.

$W(x) - W(x - h) \rightarrow +\infty$ avec x pour tout $h > 0$.

Il existe donc une suite $x_n \in \mathcal{S}$ telle que :

$$W(x_{n+1}) - W(x_n) \rightarrow +\infty \text{ avec } n.$$



Appelons $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ les points de la courbe $y = W(x)$ d'abscisses $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ et $W_0(x)$ la fonction dont le graphique est la ligne polygonale $M_1 M_2, \dots, M_n M_{n+1}, \dots$

$$W_0(x_{n+1}) - W_0(x_n) = W(x_{n+1}) - W(x_n) \rightarrow +\infty \text{ avec } n.$$

De plus, $x_{n+1} - x_n \rightarrow 0$. Les pentes des segments $M_n M_{n+1}$ croissent donc indéfiniment avec n . Par conséquent, la fonction $W_0(x)$ a, sauf pour $x \in (x_n)$, une dérivée $W'_0(x)$ telle que :

$$W_0'(x) \rightarrow +\infty \text{ avec } x.$$

D'autre part, il est clair que l'on peut tracer un petit arc de courbe dont une extrémité est M_n et dont l'autre extrémité μ_n est sur le segment $M_n M_{n+1}$ ou $M_{n-1} M_n$, qui soit tangent en M_n à $M_{n-1} M_n$ (ou à $M_n M_{n+1}$) et en μ_n à $M_n M_{n+1}$ (ou à $M_{n-1} M_n$), les pentes des tangentes à cet arc en chacun de ses points étant au moins égales à la plus petite des pentes de $M_{n-1} M_n$ et de $M_n M_{n+1}$. Cet arc sera à droite ou à gauche de M_n suivant que la pente de $M_n M_{n+1}$ est supérieure ou inférieure à celle de $M_n M_{n-1}$.

Soit $W_1(x)$ la fonction dont le graphique se déduit de celui de $W_0(x)$ en remplaçant la corde $M_n \mu_n$ par l'arc $\widehat{M_n \mu_n}$. Cette fonction a une dérivée pour toute valeur de x , et $W_1'(x) \rightarrow +\infty$ avec x .

Par suite, toute f. d. r. $F_1(x)$ telle que :

$$F_1(x) = 1 - \exp. [-W_1(x)]$$

pour x assez grand appartient à $\mathcal{T}_1$, et est associée à $F(x)$.

3/ - Examinons enfin quelques cas particuliers.

a) Considérons les lois ayant une densité de la forme :

$$f(x) = k \cdot e^{-x^\alpha}, \quad k \text{ et } \alpha \text{ étant deux constantes positives.}$$

D'après la règle de l'Hospital :

$$\lim. \frac{f(x)}{G(x)} = \lim. -\frac{f'(x)}{f(x)} = \lim. \alpha x^{\alpha-1}$$

Donc :

$$F(x) \in \mathcal{T}_1 \text{ si } \alpha > 1, \text{ et } F(x) \notin \mathcal{T}_1 \text{ si } \alpha \leq 1.$$

La loi normale appartient à $\mathcal{T}_1$ ($\alpha = 2$), tandis que la première loi de Laplace ($\alpha = 1$) n'appartient pas à $\mathcal{T}_1$.

b) Les résultats précédents s'étendent immédiatement aux lois telles que :

$$G(x) \sim k \cdot e^{-x^t}$$

c) Supposons que l'on mette $G(x)$ sous la forme :

$$G(x) = e^{-a(x)}$$

On voit de suite que si $a(x) \uparrow +\infty$, $F(x) \in \mathcal{T}$; si $a(x)$ tend vers une limite finie, $f(x) \notin \mathcal{T}$.

VII - STABILITE EN PROBABILITE DE Y_n^α -

THEOREME 26 -

Y_n^α est stable si et seulement si Y_n^1 est stable, et cela quel que soit l'entier positif α . De plus, la différence $Y_n^1 - Y_n^\alpha$ tend alors vers 0 en probabilité.

a) Condition nécessaire.

Supposons Y_n^α stable ; il existe alors une suite certaine a_n telle que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$a_n - \varepsilon <_p Y_n^\alpha \quad (10)$$

$$Y_n^\alpha <_p a_n + \varepsilon \quad (11)$$

La condition (10) entraîne évidemment :

$$a_n - \varepsilon <_p Y_n^1$$

D'après le théorème 5 (ch. 1) la condition (11) entraîne :

$$Y_n^1 <_p a_n + \varepsilon.$$

On a donc : $\Pr \{ |Y_n^1 - a_n| < \varepsilon \} \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow \infty$

et par suite : $Y_n^1 - a_n \xrightarrow{p} 0$

Cela prouve que Y_n^1 est stable, et que $Y_n^1 - Y_n^\alpha \xrightarrow{p} 0$.

b) Condition suffisante.

Si Y_n^1 est stable, il existe une suite certaine a_n telle que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$a_n - \varepsilon <_p Y_n^1 \quad (12)$$

$$Y_n^1 <_p a_n + \varepsilon \quad (13)$$

La condition (13) entraîne $Y_n^1 <_p a_n + \varepsilon$. D'après le théorème 4 (ch. 1) la condition (12) entraîne :

$$a_n - \varepsilon <_p Y_n^\alpha$$

Finalement, on voit que $Y_n^\alpha - a_n \xrightarrow{p} 0$, ce qui prouve que Y_n^α est stable, et que $Y_n^1 - Y_n^\alpha \xrightarrow{p} 0$.

Corollaire 26.

Pour qu'une v.e. Y_n^1 soit stable en probabilité il faut et il suffit que $F(x) \in \mathcal{T}$, et dans ce cas toutes les v.e. (à droite) sont stables.

Remarque.

Puisque Y_n^α est stable pour tout α fixe, il existe une suite de valeurs de $\alpha : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ telle que $\alpha_n \rightarrow \infty$ avec n et que $Y_n^{\alpha_n}$ soit stable. L'étude des suites α_n possédant cette propriété ne saurait être abordée ici, car $Y_n^{\alpha_n}$ n'est plus une valeur extrême. Nous nous réservons de revenir ailleurs sur cette question.

VIII - ETUDE DES MAILLES EXTREMES D'UN ECHANTILLON AU POINT DE VUE DE LA STABILITE -

Nous avons vu que, si $F(x) \in \mathcal{T}$, la différence $Y_n^\alpha - Y_n^{\alpha+1}$ converge en probabilité vers 0 quelle que soit la constante α . Nous nous proposons maintenant d'étudier la propriété réciproque. Nous dirons que les différences $Y_n^\alpha - Y_n^{\alpha+1}$ (ou $Z_n^{\beta+1} - Z_n^\beta$) sont les mailles de l'échantillon (mailles extrêmes à droite ou à gauche si α et β sont fixes).

Lemme 27.

Si $Y_n^1 - Y_n^2 \xrightarrow{p} 0$, $F(x)$ appartient à $\mathcal{T}$.

Démonstration.

La f. d. r. de la différence $Y_n^1 - Y_n^2$ est :

$$H_n(x) = \int_{-\infty}^{x+y} n(n-1) F^{n-2}(u) [F(x+u) - F(u)] dF(u)$$

Puisque $Y_n^1 - Y_n^2 \xrightarrow{p} 0$, $H_n(x) \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow \infty$ quel que soit $x > 0$. Posons $I_n(x) = 1 - H_n(x)$. En remarquant que :

$$1 = \int_{-\infty}^{x+y} n(n-1) F^{n-2}(u) [F(x+u) - F(u)] dF(u)$$

on peut écrire :

$$I_n(x) = \int_{-\infty}^{x+y} n(n-1) F^{n-2}(u) G(u+x) dF(u) \rightarrow 0 \text{ avec } 1/n.$$

D'autre part, soit Y_n et Y_n' les plus grandes valeurs de deux échantillons ordonnés indépendants, de même loi $F(x)$. La f. d. r. de $Y_n - Y_n'$ est :

$$D_n(x) = \int_{-\infty}^{x+y} n F^n(u+x) F^{n-1}(u) dF(u)$$

On a vu (corollaire 19) que la stabilité de Y_n équivaut à la convergence en probabilité de $Y_n - Y_n'$ vers 0. La loi de cette différence étant

symétrique par rapport à 0, il faut et il suffit, pour que Y_n soit stable, que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n F^n(u+x) F^{n-1}(u) dF(u) \rightarrow 1 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

pour tout $x > 0$, ou encore que :

$$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} n [1 - F^n(u+x)] F^{n-1}(u) dF(u) \rightarrow 0.$$

On a :

$$1 - F^n(u+x) = G(u+x) [1 + F(u+x) + \dots + F^{n-1}(u+x)] < nG(u+x)$$

Par suite :

$$J_n < \int_{-\infty}^{+\infty} n^2 G(u+x) F^{n-1}(u) dF(u) < \int_{-\infty}^{+\infty} n^2 G(u+x) F^{n-2}(u) dF(u)$$

d'où :

$$J_n < \frac{n^2}{n(n-1)} I_n$$

et puisque $I_n \rightarrow 0$, il en va de même pour J_n . C. Q. F. D.

THEOREME 27 -

Si $Y_n^\alpha - Y_n^{\alpha+1} \xrightarrow{p} 0$, en appelant α un entier fixe, la f. d. r. $F(x)$ appartient à $\mathcal{P}$.

Démonstration.

Notre démonstration va consister à établir que $Y_n^\alpha - Y_n^{\alpha+1} \xrightarrow{p} 0$ entraîne $Y_n^1 - Y_n^2 \xrightarrow{p} 0$, et la conclusion découlera du lemme 27.

La probabilité élémentaire du couple $(Y_n^\alpha, Y_n^{\alpha+1})$ est :

$$\Pr \{ u \leq Y_n^\alpha < u + du ; v \leq Y_n^{\alpha+1} < v + dv \} =$$

$$\frac{n!}{(n-\alpha-1)! (\alpha-1)!} F^{n-\alpha-1}(v) [1 - F(u)]^{\alpha-1} dF(u) dF(v)$$

La f. d. r. de $Y_n^\alpha - Y_n^{\alpha+1}$ est alors :

$$H_n(x) = \frac{n!}{\alpha! (n-\alpha-1)!} \int_{-\infty}^{+\infty} F^{n-\alpha-1}(v) \{ [1 - F(v)]^\alpha - [1 - F(v+x)]^\alpha \} dF(v)$$

Par hypothèse $Y_n^\alpha - Y_n^{\alpha+1} \xrightarrow{p} 0$, donc $H_n(x) \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow \infty$ quel que soit $x > 0$.

En remarquant que :

$$\frac{n!}{\alpha! (n - \alpha - 1)!} \int_{-\infty}^{+\infty} F^{n-\alpha-1}(v) [1 - F(v)]^\alpha dF(v) = 1$$

l'on voit que :

$$K_n = \frac{n!}{\alpha! (n - \alpha - 1)!} \int_{-\infty}^{+\infty} F^{n-\alpha-1}(v) G^{\alpha}(v+x) dF(v) \rightarrow 0$$

Il faut en déduire que $I_n \rightarrow 0$; cela entraîne en effet :

$$H_n(x) \rightarrow 1 \text{ pour tout } x > 0, \text{ donc } Y_n^1 - Y_n^2 \rightarrow 0.$$

On voit aisément que si $K_n \rightarrow 0$:

$$L_n = \int_{-\infty}^{+\infty} n^{\alpha+1} G^{\alpha}(v+x) F^{n-1}(v) dF(v) \rightarrow 0$$

De même, $I_n \rightarrow 0$ est équivalente à :

$$M_n = \int_{-\infty}^{+\infty} n^2 G(v+x) F^{n-1}(v) dF(v) \rightarrow 0.$$

Les deux intégrales précédentes ont une signification très simple : L_n est l'espérance mathématique de la fonction $[n G(v+x)]^{\alpha}$ relativement à la répartition $F_n(v) = F^n(v)$, tandis que M_n est l'espérance mathématique de $n G(v+x)$ relativement à la même répartition.

$$L_n = E_n \{ [n G(v+x)]^{\alpha} \} \quad ; \quad M_n = E_n \{ n G(v+x) \}$$

Soit t une v. a. répartie uniformément entre 0 et 1. On obtiendra la répartition de v en posant :

$$v = F_n^{-1}(t) = F^{-1}\left(t^{\frac{1}{n}}\right)$$

On a donc :

$$L_n = E \{ (n G [x + F^{-1}(t^{\frac{1}{n}})])^{\alpha} \} = \int_0^1 \{ n G [x + F^{-1}(t^{\frac{1}{n}})] \}^{\alpha} dt$$

$$M_n = E \{ n G [x + F^{-1}(t^{\frac{1}{n}})] \} = \int_0^1 n G [x + F^{-1}(t^{\frac{1}{n}})] dt$$

Il s'agit de démontrer que la condition $L_n \rightarrow 0$ entraîne $M_n \rightarrow 0$. La fonction $\psi_n(t) = n G [x + F^{-1}(t^{\frac{1}{n}})]$ est monotone non croissante. Appelons λ_n la borne supérieure des valeurs de t telles que $\psi_n(t) \geq 1$. On a :

$$L_n = \int_0^{\lambda_n} [\psi_n(t)]^{\alpha} dt + \int_{\lambda_n}^1 [\psi_n(t)]^{\alpha} dt$$

Donc :

$$L_n^1 = \int_0^{\lambda_n} [\psi_n(t)]^{\alpha} dt \rightarrow 0$$

et :

$$L_n'' = \int_{\lambda_n}^{+1} [\psi_n(t)]^\alpha dt \rightarrow 0$$

Dans l'intervalle $(0, \lambda_n)$ on a :

$$\psi_n(t) \leq [\psi_n(t)]^\alpha$$

et par suite :

$$M_n' = \int_0^{\lambda_n} \psi_n(t) dt \rightarrow 0 \text{ avec } 1/n$$

Représentons par $\psi_n^*(t)$ la fonction qui est égale à $\psi_n(t)$ dans l'intervalle $(\lambda_n, 1)$ et qui s'annule dans $(0, \lambda_n)$. Elle est bornée dans l'intervalle $(0, 1)$ et, puisque :

$$L_n'' = \int_{\lambda_n}^{+1} [\psi_n^*(t)]^\alpha dt \rightarrow 0$$

$[\psi_n^*(t)]^\alpha \rightarrow 0$ en mesure dans $(0, 1)$. Il en résulte la même propriété pour $\psi_n^*(t)$, et ainsi l'on a bien :

$$M_n'' = \int_0^{+1} \psi_n^*(t) dt \rightarrow 0$$

Finalement, on voit que $M_n \rightarrow 0$ avec $1/n$, quel que soit $x > 0$.

C. Q. F. D.

Remarque.

La valeur de la probabilité élémentaire attribuée au couple $(Y^\alpha, Y^{\alpha+1})$ n'est correcte que si $F(x)$ est continue ; elle n'a qu'une signification formelle si $F(x)$ est discontinue, mais l'expression de $H_n(x)$ est exacte dans tous les cas.

Nous pouvons résumer les résultats que nous possédons sur les mailles extrêmes (à droite) d'un échantillon comme suit :

Corollaire 27.

Pour que les mailles extrêmes à droite d'un échantillon de taille n d'une loi $F(x)$ se resserrent indéfiniment en probabilité, il faut et il suffit que $F(x) \in \mathcal{F}$.

Remarque.

Si $F(x) > 0$ quel que soit x , $Z_n^\beta \xrightarrow{\beta} \infty$ p. co. quand $n \rightarrow \infty$. On a, pour la stabilité de Z_n , des théorèmes semblables à ceux que nous avons obtenus pour Y_n . Nous croyons inutile de les énoncer.

C - STABILITE RELATIVE EN PROBABILITE -

IX - EXTENSION DE LA NOTION DE STABILITE EN PROBABILITE -

1/ - Etant donné une suite de v. a. X_n , supposons qu'une fonction $f(x)$ soit définie pour toute valeur possible des X_n , et qu'il lui corresponde une nouvelle v. a. $\Xi_n = f(X_n)$. Ce sera le cas si $f(x)$ est continue, par exemple (Cf Fréchet I, p. 52).

Dans ces conditions, nous dirons que X_n est "f-stable en probabilité" si $f(X_n)$ est stable en probabilité.

Nous allons voir qu'en prenant : $f(x) = \text{Log } |x|$, on obtient la "stabilité relative" introduite par Gnedenko en 1943 dans son mémoire sur les valeurs extrêmes.

2/ - D'après Gnedenko, une suite (X_n) est relativement stable (en probabilité) s'il existe une suite certaine (a_n) telle que :

$$\frac{X_n}{a_n} \xrightarrow{p} 1$$

En supposant $x_n > 0$, cela a lieu si et seulement si :

$$\text{Log}(X_n) - \text{Log}(a_n) \xrightarrow{p} 1$$

Par conséquent, la stabilité relative et la Log-stabilité sont alors équivalentes. Les résultats concernant la stabilité relative des v. e. d'un échantillon se déduiront immédiatement des résultats concernant la stabilité proprement dite (ou stabilité absolue). Ajoutons que ce lien très simple entre les deux modes de stabilité considérés n'a pas été signalé par Gnedenko.

3/ - Avant d'étudier la stabilité relative des v. e., comparons la stabilité relative (SR) et la stabilité absolue (S) d'une même suite (X_n) .

a) S'il existe deux nombres positifs, α, β tels que :

$$\text{Pr } \{ |X_n| \subset (\alpha, \beta) \} \longrightarrow 1 \text{ on a : } SR = S$$

b) Si $X_n \xrightarrow{p} 0$: $SR \subset S$

c) Si $|X_n| \xrightarrow{p} \infty$: $SR \supset S$

Ce dernier cas est celui qui va nous occuper maintenant.

X - STABILITE RELATIVE DE Y_n -

Appelons $\hat{F}(x)$ la f. d. r. telle que :

$$\hat{F}(x) = F(x) \quad \text{pour } x > 1 ; \quad \hat{F}(x) = 0 \quad \text{pour } x \leq 1$$

D'un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de la loi $F(x)$, nous déduirons un échantillon $(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_n)$ de la loi $\hat{F}(x)$ en posant :

$$\hat{X}_i = X_i \quad \text{si } X_i > 1$$

$$\hat{X}_i = 1 \quad \text{si } X_i \leq 1$$

Si $F(x) < 1$ quel que soit x , $Y_n \xrightarrow[p.c.o.]{} +\infty$, donc :

$$\Pr \{ \hat{Y}_n^a = Y_n^a \} \longrightarrow 1 \quad \text{quand } 1/n \longrightarrow 0.$$

La stabilité (absolue ou relative) de l'une des deux variables Y^a , $\hat{Y}_n^a$, entraîne donc pour l'autre la même propriété.

THEOREME 28 -

Y_n est relativement stable en probabilité si et seulement si l'on a :

$$F^{-1}(1-t) \sim F^{-1}(1-kt) \quad \text{quand } t \longrightarrow +0,$$

pour une valeur positive de $k \neq 1$.

Démonstration.

En effet, la stabilité relative de Y_n équivaut à la stabilité absolue de $\text{Log } \hat{Y}_n$. Cette v. a. est la plus grande valeur de l'échantillon :

$$\{ \xi_i \}_{i=1, \dots, n} \quad \text{avec } \xi = \text{Log } \hat{X}$$

Or, pour $\xi > 0$:

$$F_{\xi}(\xi) = \Pr \{ \text{Log } \hat{X} < \xi \} = \Pr \{ \hat{X} < e^{\xi} \} = F(e^{\xi})$$

Si l'on pose : $F_{\xi}(\xi) = \eta$,

on a : $F(e^{\xi}) = \eta$

d'où : $\xi = \text{Log } F^{-1}(\eta) = F_{\xi}^{-1}(\eta)$

D'après le théorème 21, $\text{Log } \hat{Y}_n$ est stable si et seulement s'il existe un nombre positif $k \neq 1$ tel que :

$$F_{\Xi}^{-1}(1-t) - F_{\Xi}^{-1}(1-kt) \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow +0,$$

ce qui s'écrit : $\text{Log } F^{-1}(1-t) - \text{Log } F^{-1}(1-kt) \rightarrow 0$

$$\text{ou encore : } \frac{F^{-1}(1-t)}{F^{-1}(1-kt)} \rightarrow 1 \quad \text{C. Q. F. D.}$$

THEOREME 29 -

Pour que Y_n soit relativement stable, il faut et il suffit que :

$$\frac{G(kx)}{G(x)} \rightarrow 0 \quad \text{avec } 1/x,$$

pour toute valeur de $k > 1$.

Démonstration.

En effet, la stabilité relative de Y_n équivaut à la stabilité absolue de $\text{Log } \hat{Y}_n$ et cette dernière propriété, d'après le théorème 22 a lieu si et seulement si :

$$\frac{1 - F_{\Xi}^{-1}(\xi)}{1 - F_{\Xi}^{-1}(\xi - h)} \rightarrow 0 \quad \text{avec } 1/\xi \quad \text{pour tout } h > 0$$

$$\text{Or : } \frac{1 - F_{\Xi}^{-1}(\xi)}{1 - F_{\Xi}^{-1}(\xi - h)} = \frac{G(e^{\xi})}{G(e^{\xi-h})}$$

et l'on obtient le résultat indiqué en posant :

$$x = e^{\xi-h}, \quad k = e^h$$

Ce théorème a été établi de façon directe par Gnedenko, qui ne l'a pas rattaché au théorème 22.

Notation.

Nous appellerons ζ la famille des f.d.r. $F(x)$ qui engendrent des échantillons dont les plus grandes valeurs sont relativement stables en probabilité.

XI - DETERMINATION DES FONCTIONS DE LA FAMILLE ζ -

THEOREME 30 -

Supposons que la f.d.r. $F(x)$ admette, pour x assez grand, une dérivée $f(x)$. Dans ce cas, $F(x) \in \zeta$ si :

$$x. f(x) / G(x) \longrightarrow +\infty \text{ avec } x \quad (14)$$

Démonstration.

En effet, la condition $F(x) \in \zeta_1^+$ équivaut à $F(e^\xi) \in \zeta_1^+$. Or cette dernière condition est réalisée si :

$$e^\xi. f(e^\xi) / G(e^\xi) \longrightarrow +\infty \text{ avec } \xi$$

et en posant $x = e^\xi$ le théorème est établi.

Nous désignerons par ζ_1^+ la sous-famille de ζ_1^+ formée par les f. d. r. qui vérifient la condition (14).

THEOREME 31 -

Soit une f. d. r. $F_1(x)$ appartenant à ζ_1^+ . Si une f. d. r. $F(x)$ coïncide avec $F_1(x)$ pour une suite croissante de valeurs de x telles que :

$$x_n \longrightarrow +\infty \text{ avec } n, \text{ et } x_n \sim x_{n+1} \text{ on a : } F(x) \in \zeta_1^+.$$

Réciproquement, toute f. d. r. $F(x)$ appartenant à ζ_1^+ peut être associée à une fonction $F_1(x) \in \zeta_1^+$ de cette façon.

Ce théorème résulte immédiatement du théorème 25.

Exemples.

1/ - Considérons la loi de Poisson : $p_n = e^{-a} \frac{a^n}{n!}$

En posant : $n = [x]$, on a : $G(x) = G(n) \sim p_{n+1}$.

Soit un nombre quelconque $k > 1$, et $m = [kx]$. On a :

$$g(kx) = G(m) \sim p_{m+1}.$$

Quand $x \longrightarrow +\infty$, m et $n \longrightarrow +\infty$ de telle sorte que $m/n \longrightarrow k$. Par suite, $p_{m+1}/p_{n+1} \longrightarrow 0$ et le théorème 29 nous permet d'affirmer que la loi envisagée appartient à ζ_1^+ .

2/ - Toute loi F ayant une densité de la forme e^{-ax} ($a > 0$) appartient à ζ_1^+ (la 1ère loi de Laplace entre dans cette catégorie).

XII - STABILITE RELATIVE EN PROBABILITE DE Y_n -

En substituant $\hat{Y}_n^a$ à Y_n^a , et en faisant intervenir la v. a. $\Xi = \text{Log } \hat{X}$, on déduit du § VII les résultats suivants :

THEOREME 32 -

α étant un entier fixe, Y_n^α est relativement stable si et seulement si Y_n^1 est relativement stable. De plus, on a alors :

$$Y_n^\alpha / Y_n^1 \xrightarrow{p} 1$$

Corollaire 32.

Pour qu'une v. e. Y_n^α soit relativement stable, il faut et il suffit que $F(x) \in \mathcal{C}_j^+$, et dans ce cas toutes les v. e. (à droite) sont relativement stables.

XIII - EQUIVALENCE EN PROBABILITE DES V. E. D'UN ECHANTILLON -

D'après le théorème 32, si $F(x) \in \mathcal{C}_j^+$, on a : $Y_n^\alpha \sim_p Y_n^\beta$ quand $n \rightarrow \infty$. Etudions la propriété réciproque.

THEOREME 23 -

Y_n^α et Y_n^β étant deux v. e. d'un échantillon de la loi $F(x)$, la relation :

$$Y_n^\alpha \sim_p Y_n^\beta \tag{15}$$

entraîne : $F(x) \in \mathcal{C}_j^+$.

Démonstration.

En effet, la condition (15) entraîne : $\hat{Y}_n^\alpha \sim_{\hat{c}} \hat{Y}_n^\beta$

Donc : $\text{Log } \hat{F}_n^\alpha - \text{Log } \hat{Y}_n^\alpha \rightarrow 0$

Les mailles extrêmes (à droite) de l'échantillon formé par les variables $\Xi_i = \text{Log } \hat{X}_i$ se resserrent indéfiniment en probabilité et par suite les v. e. de cet échantillon sont stables. Cela implique la stabilité relative des v. e. (à droite) de l'échantillon $\{X_i\}$.

CHAPITRE III

STABILITÉ PRESQUE COMPLÈTE DES VALEURS EXTRÊMES D'UN ÉCHANTILLON

A - VARIABLES ALEATOIRES STABLES PRESQUE COMPLE-
TEMENT -

I - STABILITE PRESQUE COMPLETE -

1/ - Définition.

Une suite de v. a. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ est stable p.co. s'il existe une suite certaine $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ telle que $X_n - a_n$ converge p.co. vers 0.

Dans ce cas, en appelant $F_n(x)$ la f.d.r. de X_n , la série de terme général :

$$u_n = 1 - F_n(a_n + \varepsilon) + F_n(a_n - \varepsilon)$$

est convergente aussi petit que soit le nombre positif ε .

Réciproquement, s'il existe une suite certaine a_n telle que la série $\sum u_n$ converge pour tout $\varepsilon > 0$, il en résulte que $X_n - a_n \xrightarrow[p.co.]{} 0$ donc que la suite X_n est stable p.co.

2/ - THEOREME 34 -

Soit $Q_n(l)$ la fonction de concentration de X_n . La suite (X_n) est stable p.co. si et seulement si la série $[1 - Q_n(l)]$ est convergente aussi petit que soit l .

a) Condition nécessaire.

Si (X_n) est stable p.co. il existe une suite certaine (a_n) telle que la série de terme général :

$$1 - F_n(a_n + \frac{1}{2}) + F_n(a_n - \frac{1}{2})$$

converge pour tout $l > 0$. Or :

$$F_n(a_n + \frac{1}{2}) - F_n(a_n - \frac{1}{2}) \leq Q_n(l)$$

donc :

$$1 - Q_n(l) \leq 1 - F_n(a + \frac{1}{2}) + F_n(a_n - \frac{1}{2})$$

et par suite, $[1 - Q_n(l)]$ converge quel que soit l .

b) Condition suffisante.

Supposons que $\sum [1 - Q_n(l)]$ converge pour tout l . On peut alors trouver une suite l_n de valeurs de l tendant vers 0 avec $1/n$, et assurant la convergence de la série $\sum [1 - Q_n(l_n)]$.

En effet, choisissons arbitrairement une suite de nombres h_n positifs, tendant vers 0 avec $1/n$, et posons $u_n(l) = 1 - Q_n(l)$. Il existe alors une suite d'entiers $n_1, n_2, \dots, n_j, \dots$ vérifiant les conditions :

$$\sum_{n_1}^{\infty} u_n(h_1) < \frac{1}{2} ; \sum_{n_2}^{\infty} u_n(h_2) < (\frac{1}{2})^2 ; \dots \sum_{n_j}^{\infty} u_n(h_j) < (\frac{1}{2})^j \dots$$

$$n_1 < n_2 < \dots < n_j < \dots$$

La suite l_n étant définie par :

$$l_n = h_j \text{ pour } n_j \leq n < n_{j+1}, \text{ on a :}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n_1}^{\infty} u_n(l_n) &= \sum_{n_1}^{n_2-1} u_n(h_1) + \sum_{n_2}^{n_3-1} u_n(h_2) + \dots + \sum_{n_j}^{n_{j+1}-1} u_n(h_j) + \dots \\ &< \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \dots + (\frac{1}{2})^j + \dots = 1 \end{aligned}$$

La série $\sum u_n(l_n)$ est donc bien convergente.

Puisqu'il existe toujours un intervalle de concentration maximum on peut trouver une suite a_n pour laquelle :

$$F_n(a_n + l_n) - F_n(a_n) = Q_n(l_n)$$

Quel que soit $\epsilon > 0$, on a, quand n est assez grand, $l_n < \epsilon$ ce qui entraîne :

$$F_n(a_n + \epsilon) - F_n(a_n - \epsilon) \geq Q_n(l_n)$$

et :

$$1 - F_n(a_n + \epsilon) + F_n(a_n - \epsilon) \leq 1 - Q_n(l_n)$$

La convergence de la série $\sum [1 - Q_n(l_n)]$ implique celle de la série :

$$\sum [1 - F_n(a_n + \varepsilon) + F_n(a_n - \varepsilon)] \text{ pour tout } \varepsilon > 0,$$

c'est-à-dire la stabilité p.co. de X_n .

II - STABILITE PRESQUE COMPLETE D'UNE SOMME DE V.A. -

1/ - THEOREME 35 -

La somme Z_n de deux v.a. X_n et Y_n stables p.co. est une v.a. stable p.co.

Démonstration.

Montrons que, a_n et b_n étant des suites certaines, les conditions :

$$X_n - a_n \xrightarrow{p.co.} 0 \quad \text{et} \quad Y_n - b_n \xrightarrow{p.co.} 0$$

entraînent : $Z_n - (a_n + b_n) \xrightarrow{p.co.} 0$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit, si l'on pose :

$$\Pr\{|X_n - a_n| < \varepsilon\} = 1 - \alpha_n ; \quad \Pr\{|Y_n - b_n| < \varepsilon\} = 1 - \beta_n$$

les séries $\sum \alpha_n$ et $\sum \beta_n$ sont convergentes. Or, on a :

$$\Pr\{|Z_n - (a_n + b_n)| < 2\varepsilon\} > \Pr\{|X_n - a_n| < \varepsilon ; |Y_n - b_n| < \varepsilon\} \geq 1 - \alpha_n - \beta_n$$

La série $\sum (\alpha_n + \beta_n)$ est convergente, et l'on déduit de l'inégalité précédente que $Z_n - (a_n + b_n) \xrightarrow{p.co.} 0$.

Remarque.

Il peut arriver que Z_n soit stable p.co. sans que X_n et Y_n le soient. Toutefois, dans certains cas, la stabilité p.co. de Z_n implique celle de X_n et Y_n . Nous donnons ci-après un premier résultat en ce sens, que nous généraliserons quand nous aurons introduit l'indépendance limite de deux variables aléatoires.

2/ - THEOREME 36 -

Etant donné deux v.a. indépendantes X_n et Y_n , si leur somme Z_n est stable p.co., elles le sont toutes les deux.

Démonstration.

En effet, puisque X_n et Y_n sont indépendantes, l'égalité :

$$Z_n = X_n + Y_n$$

entraîne : $Q_{X_n}(1) > Q_{Z_n}(1)$

On a donc : $1 - Q_{X_n}(1) < 1 - Q_{Z_n}(1)$

et si Y_n est stable p.co. la série $\sum [1 - Q_{Z_n}(1)]$ est convergente ; on déduit alors de l'inégalité précédente que $\sum [1 - Q_{X_n}(1)]$ est aussi convergente, c'est-à-dire que X_n est stable p.co. Même démonstration pour Y_n .

3/ - Corollaire 36.

Associons à chaque variable X_n d'une suite aléatoire la variable X'_n indépendante et de même loi.

Pour que X_n soit stable p.co., il faut et il suffit que :

$$X_n - X'_n \xrightarrow[p.co.]{} 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty$$

Démonstration.

Si cette condition est réalisée, X_n et X'_n sont stables p.co. d'après le théorème 36.

Réciproquement, si X_n est stable p.co., il existe une suite certaine a_n telle que :

$$X_n - a_n \xrightarrow[p.co.]{} 0 \quad \text{et} \quad X'_n - a_n \xrightarrow[p.co.]{} 0$$

ce qui entraîne : $X_n - X'_n \xrightarrow[p.co.]{} 0$

B - APPLICATION AUX VALEURS EXTREMES D'UN ECHANTILLON -

III - STABILITE PRESQUE COMPLETE DE Y_n -

1/ - Si Y_n est stable p.co., il existe une suite certaine a_n telle que : $Y_n - a_n \xrightarrow[p.co.]{} 0$. A fortiori, Y_n est stable en probabilité et : $Y_n - a_n \xrightarrow[p.]{} 0$. Nous pourrions donc toujours prendre :

$$A_n = G^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Y_n sera stable p.co. si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$a_n + \varepsilon \xrightarrow[p.co.]{} Y \quad (\text{condition } C^+)$$

$$a_n - \varepsilon \xrightarrow[p.co.]{} Y \quad (\text{condition } C^-)$$

La loi de Y_n étant $F^n(x)$, les conditions C^+ et C^- sont respectivement équivalentes à :

$$\sum [1 - F^n(a_n + \varepsilon)] < \infty \quad (C^+)$$

$$\sum F^n(a_n - \varepsilon) < \infty \quad (C^-)$$

On voit aisément que :

$$1 - F^n(a_n + \varepsilon) \sim nG(a_n + \varepsilon)$$

ce qui permet de substituer la série :

$$\sum nG(a_n + \varepsilon) \quad \text{à la série} \quad \sum [1 - F^n(a_n + \varepsilon)].$$

2/ - Le premier problème qui se pose est de caractériser la stabilité p.co. de Y_n aussi simplement que possible.

a) Etude de la condition C^+ .

THEOREME 37 -

La condition C^+ est vérifiée si et seulement si l'expression :

$$E \left\{ \frac{1}{G^2(x - \varepsilon)} \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF(x)}{G^2(x - \varepsilon)}$$

existe pour tout $\varepsilon > 0$.

Démonstration.

$$\text{Posons } B(n) = a_n + \varepsilon = G^{-1} \left(\frac{1}{n} \right) + \varepsilon$$

D'après le théorème 10 la condition C^+ équivaut à l'existence de l'intégrale :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} [B^{-1}(x)]^2 dF(x)$$

$$\text{Or, la relation :} \quad B(t) = G^{-1} \left(\frac{1}{t} \right) + \varepsilon = x$$

$$\text{nous donne :} \quad t = B^{-1}(x) = 1 / G(x - \varepsilon)$$

ce qui établit notre proposition.

b) Etude de la condition C^- .

THEOREME 38 -

La condition C^- est vérifiée si et seulement si l'expression :

$$E \left\{ \frac{1}{G^2(x)} \exp \left[- \frac{G(x - \varepsilon)}{G(x)} \right] \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{G^2(x)} \exp \left[- \frac{G(x - \varepsilon)}{G(x)} \right] dF(x)$$

existe pour tout $\varepsilon > 0$.

Démonstration.

Posons $u_n = F^n(a_n - \varepsilon)$. Il est facile de voir que la convergence de cette série équivaut à l'existence de l'intégrale :

$$I = \int_1^{+\infty} F^t \left[G^{-1} \left(\frac{1}{t} \right) - \varepsilon \right] dt$$

En effet, en posant :

$$v_n = \int_n^{n+1} F^t \left[G^{-1} \left(\frac{1}{t} \right) - \varepsilon \right] dt = \int_n^{n+1} \exp(t \text{LF} [G^{-1}(\frac{1}{t}) - \varepsilon]) dt,$$

on peut écrire :

$$\int_n^{n+1} \exp [t \text{Log} F(a_n - \varepsilon)] dt < v_n < \int_n^{n+1} \exp [t \text{Log} F(a_{n+1} - \varepsilon)] dt$$

ou, en appliquant la formule de la moyenne aux deux intégrales :

$$\exp [(n + \theta_1) \text{Log} F(a_n - \varepsilon)] < v_n < \exp [(n + \theta_2) \text{Log} F(a_{n+1} - \varepsilon)] \quad (1)$$

avec $0 < \theta_1 < 1$ et $0 < \theta_2 < 1$

Quand $n \rightarrow \infty$, $F(a_n - \varepsilon) \rightarrow 1$, et par suite :

$$\exp [(n + \theta_1) \text{Log} F(a_n - \varepsilon)] \sim u_n ; \exp [(n + \theta_2) \text{Log} F(a_{n+1} - \varepsilon)] \sim u_{n+1}$$

La double inégalité (1) nous montre alors que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. Or, la convergence de $\sum v_n$ coïncide avec l'existence de I , ce qui valide la première étape de notre raisonnement.

Le changement de variable $t = \frac{1}{G(x)}$ transforme I en :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(\frac{\text{Log} F(x - \varepsilon)}{G(x)} \right) \frac{dF(x)}{G^2(x)}$$

Pour achever notre démonstration, il nous suffira de montrer que, si I existe pour tout $\varepsilon > 0$, il en va de même pour l'intégrale :

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(- \frac{G(x - \varepsilon)}{G(x)} \right) \frac{dF(x)}{G^2(x)} \quad \text{et réciproquement.}$$

On peut écrire :

$$\text{Log } F(x - \varepsilon) = \text{Log } [1 - G(x - \varepsilon)] = - G(x - \varepsilon) [1 + \rho(x - \varepsilon)]$$

où la fonction $\rho(x - \varepsilon) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$

Soit ε' un nombre choisi arbitrairement, mais supérieur à ε .

Puisque $G(x - \varepsilon)/G(x - \varepsilon') \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$, on a pour x assez grand :

$$- \frac{G(x - \varepsilon')}{G(x)} < - \frac{G(x - \varepsilon)}{G(x)} (1 + \rho) < - \frac{G(x - \varepsilon)}{G(x)}$$

La 2ème inégalité nous montre que l'existence de J entraîne celle de I. La 1ère inégalité nous montre que si I existe pour une certaine valeur de ε , J existe pour toute valeur $\varepsilon' > \varepsilon$. Donc, si I existe quel que soit $\varepsilon > 0$, J existe également quel que soit ε . C. Q. F. D.

c) Comparaison des conditions C^+ et C^- .

THEOREME 39 -

Si la condition C^+ est vérifiée, il en est de même de C^- . La réciproque est inexacte.

Démonstration.

Supposons que C^+ soit vérifiée. On a alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-dG(x)}{G(x - \varepsilon)} < \infty \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

Dans ce cas, $G(x)/G(x - \varepsilon) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \infty$.

La condition :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(- \frac{G(x - \varepsilon)}{G(x)} \right) \frac{dG(x)}{G^2(x)} < \infty$$

est bien vérifiée, car, pour x assez grand :

$$\exp \left(- \frac{G(x - \varepsilon)}{G(x)} \right) \frac{1}{G^2(x)} < \frac{1}{G^2(x - \varepsilon)}$$

Un exemple montre que C^- peut être vérifiée sans que C^+ le soit. Il en est ainsi pour $G(x) = \exp(-x^2)$.

En rapprochant les trois théorèmes précédents, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 39.

Pour que Y_n soit stable p. co. il faut et il suffit que $E \left\{ \frac{1}{G^2(x - \varepsilon)} \right\}$ existe pour tout $\varepsilon > 0$.

Remarque.

Nous aurions pu arriver à ce résultat en partant du fait que la stabilité p. co. de Y_n équivaut à la convergence p. co. de $Y_n - Y_n'$ vers 0, Y_n' étant une v. a. indépendante de Y_n et de même loi. La méthode que nous avons employée est cependant plus fine, et nous a permis de constater que la loi de Y_n est en quelque sorte plus "concentrée" à gauche de a_n qu'à droite. Ce phénomène important sera la clef de l'étude de la stabilité presque sûre de Y_n .

d) Forme définitive de la condition de stabilité presque complète de Y_n .

La condition indiquée dans le corollaire ci-dessus peut se mettre sous une forme beaucoup plus simple.

Lemme 40.

α étant une constante ≥ 1 , on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G^{1-\alpha}(x)}{G^{\alpha+1}(x - \varepsilon)} dF(x) < \infty \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0$$

si et seulement si :

$$\text{Log } G(x + h) / \text{Log } G(x) \rightarrow \alpha \quad \text{avec } x$$

quel que soit $h > 0$.

Démonstration.

Supposons d'abord que :

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G^{1-\alpha}(x)}{G^{\alpha+1}(x - \varepsilon)} dF(x)$$

existe pour tout $\varepsilon > 0$. On peut écrire :

$$\int_A^{+\infty} \frac{G^{\alpha-1}(x)}{G^{\alpha+1}(x-\varepsilon)} dF(x) = \frac{1}{\alpha} \int_A^{+\infty} \frac{-dG^{\alpha}(x)}{G^{\alpha+1}(x-\varepsilon)} > \frac{1}{\alpha} \int_A^{+\infty} \frac{-dG^{\alpha}(x)}{G^{\alpha+1}(A-\varepsilon)} = \\ = \frac{1}{\alpha} \frac{G^{\alpha}(A)}{G^{\alpha+1}(A-\varepsilon)}$$

Quand $A \rightarrow +\infty$, le premier membre de cette inégalité tend vers 0, donc aussi le second membre. Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G^{\alpha}(t+h)}{G^{\alpha+1}(t)} = 0 \quad \text{quel que soit } h > 0$$

En posant $W(t) = -\text{Log } G(t)$, cela s'écrit :

$$W(t+h) - (1 + \frac{1}{\alpha}) W(t) \rightarrow +\infty \text{ avec } t.$$

n étant un entier arbitrairement grand, on a, quand $t \rightarrow +\infty$:

$$W(t + \frac{h}{n}) - (1 + \frac{1}{\alpha}) W(t) \rightarrow +\infty$$

$$W(t + \frac{2h}{n}) - (1 + \frac{1}{\alpha}) W(t + \frac{h}{n}) \rightarrow +\infty$$

.....

$$W(t+h) - (1 + \frac{1}{\alpha}) W(t + \frac{n-1}{n} h) \rightarrow +\infty$$

On en déduit :

$$W(t+h) - (1 + \frac{1}{\alpha})^n W(t) \rightarrow +\infty$$

A l'entier n, il correspond donc un nombre t_n , tel que $t > t_n$ entraîne :

$$\frac{W(t+h)}{W(t)} > (1 + \frac{1}{\alpha})^n$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, l'expression $(1 + \frac{1}{\alpha})^n$ croît indéfiniment, et l'on a bien :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{W(t+h)}{W(t)} = +\infty \quad \text{pour tout } h > 0$$

Réciproquement, si l'on suppose cette condition vérifiée, on peut écrire :

$$\text{Log } G(x-\varepsilon) = \lambda(x) \text{Log } G(x)$$

où $\lambda(x)$ est une fonction positive de x qui tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. On a alors :

$$\int_{-\infty}^A \frac{G^{\alpha-1}(x)}{G^{\alpha+1}(x-\varepsilon)} dF(x) = \int_{-\infty}^A G^{\alpha-1-\lambda(x)(\alpha+1)}(x) dF(x)$$

En choisissant x assez grand, on peut écrire :

$$\alpha - 1 - \lambda(x)(\alpha + 1) \geq -\lambda(x)(\alpha + 1) > -\frac{1}{2}$$

Puisque :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF(x)}{\sqrt{G(x)}} < +\infty$$

on a également :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G^{\alpha-1}(x)}{G^{\alpha+1}(x-\varepsilon)} dF(x) < +\infty$$

THEOREME 40 -

Pour que Y_n soit stable presque complètement, il faut et il suffit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log } G(x+h)}{\text{Log } G(x)} = +\infty \text{ quel que soit } h > 0.$$

Démonstration.

En effet, la stabilité p. co. de Y_n équivaut à :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF(x)}{G^2(x-\varepsilon)} < \infty \text{ pour tout } \varepsilon > 0$$

et, d'après le lemme précédent que l'on applique en faisant $\alpha = 1$, cette condition équivaut à :

$$\frac{\text{Log } G(x+h)}{\text{Log } G(x)} \longrightarrow +\infty \text{ avec quel que soit } h > 0.$$

C. Q. F. D.

Notation.

Dorénavant, nous désignerons par $\mathcal{H}$ la famille des f. d. r. $F(x)$ telles que Y_n soit stable p. co.

IV - STABILITE PRESQUE COMPLETE DE Y_n^α -

Supposons que Y_n^α soit stable p. co. et appelons (a_n) une suite certaine telle que $Y_n^\alpha - a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Etant stable p. co., Y_n^α est à fortiori stable en probabilité, et Y_n^1 possède aussi cette dernière propriété d'après le théorème 26.

On a alors : $Y_n^\alpha - G^{-1}(\frac{1}{n}) \xrightarrow{\rho} 0$

Nous pourrions donc prendre :

$$a_n = G^{-1}(\frac{1}{n})$$

La stabilité p. co. Y_n^α équivaut à l'ensemble des deux conditions suivantes :

$$Y_n^\alpha \leq_{p.c.o.} a_n + \varepsilon \text{ pour tout } \varepsilon > 0 \quad (\text{Condition } C_\alpha^+)$$

$$a_n - \varepsilon \leq_{p.c.o.} Y_n^\alpha \quad " \quad " \quad " \quad (\text{Condition } C_\alpha^-)$$

a) Etude de C_α^+ .

THEOREME 41 -

Pour que la condition C_α^+ soit réalisée, il faut et il suffit que $F(x)$ appartienne à $\mathcal{H}$.

Posons : $B(n) = a_n + \varepsilon = G^{-1}(\frac{1}{n}) + \varepsilon$

et : $B(t) = G^{-1}(\frac{1}{t}) + \varepsilon = x$

On a : $t = B^{-1}(x) = \frac{1}{G(x - \varepsilon)}$

Le corollaire 10 du ch. 1 nous indique alors que la condition C_α^+ est équivalente à :

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G^{\alpha-1}(x)}{G^{\alpha+1}(x - \varepsilon)} dF(x) < \infty \text{ pour tout } \varepsilon > 0.$$

Mais en utilisant les résultats établis au n° III, d, on voit que cette condition équivaut à : $F(x) \in \mathcal{H}$ C. Q. F. D.

b) Etude de C_α^- .

THEOREME 42 - La condition C_α^+ implique C_α^- .

D'après le théorème 12 (ch. 1), la condition C_α^- équivaut à :

$$\sum F^n(a_n - \varepsilon) [n G(a_n - \varepsilon)]^{\alpha-1} < \infty$$

Or, on peut écrire :

$$\begin{aligned} W_n &= F^n(a_n - \varepsilon) [n G(a_n - \varepsilon)]^{\alpha-1} = \\ &= \exp \{ n \operatorname{Log} [1 - G(a_n - \varepsilon)] + (\alpha - 1) \operatorname{Log} n G(a_n - \varepsilon) \} \\ &< \exp [-n G(a_n - \varepsilon) + (\alpha - 1) \operatorname{Log} n G(a_n - \varepsilon)] = w'_n \end{aligned}$$

Pour n assez grand, on a :

$$w'_n < \exp \left\{ - \frac{n G(a_n - \varepsilon)}{2} \right\} = w''_n$$

On verrait comme au §I que w''_n est convergente si et seulement si :

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(- \frac{G(x - \varepsilon)}{2G(x)} \right) \frac{1}{G^2(x)} dF(x) < \infty$$

Or, l'existence de K entraîne celle de L . En effet, si K existe, le rapport $G(x)/G(x - \varepsilon)$ tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$ et l'on a, pour x assez grand :

$$\exp \left(- \frac{G(x - \varepsilon)}{2G(x)} \right) \frac{1}{G^2(x)} < \frac{G^{\alpha-1}(x)}{G^{\alpha+1}(x - \varepsilon)}$$

Corollaire 42.

Pour que Y_n^α soit stable p. co., en appelant α un entier donné, il faut et il suffit que $F(x) \in \mathcal{H}$.

De plus, on a alors, quel que soit l'entier β :

$$Y_n^\alpha - Y_n^\beta \xrightarrow[p, \text{co.}]{} 0$$

V - ETUDE DES MAILLES EXTREMES -

Nous venons de voir que, si $F(x) \in \mathcal{H}$, toutes les mailles extrêmes $Y_n^\alpha - Y_n^{\alpha+1}$ tendent vers 0 p. co. Pour établir la réciproque, nous emploierons le lemme suivant :

Lemme 43.

Soit une série dont le terme général est de la forme :

$$u_n = \int_0^1 f_n(t) dt$$

avec $f_n(t) \geq 0$ et mesurable dans $[0, 1]$.

Supposons que, pour tout $t \in [0, 1]$, $\sum_1^n f_k(t)$ ait une limite $\phi(t)$ quand $n \rightarrow \infty$, cette limite étant bornée dans $[0, a]$ quel que soit $a < 1$.

Dans ces conditions, la série (u_n) est de même nature que l'intégrale :

$$\int_0^1 \phi(t) dt$$

Démonstration.

$$\text{Posons : } \phi_n(t) = \sum_1^n f_k(t).$$

$$\text{On a : } S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \int_0^1 \phi_n(t) dt$$

Remarquons que, dans tout intervalle $[0, a]$ (avec $a < 1$) $\phi(t)$ est mesurable. En effet, elle est bornée et c'est la limite d'une suite de fonctions mesurables. D'après un théorème de Lebesgue, on a donc :

$$\int_0^a \phi(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a \phi_n(t) dt$$

Puisque $f_n(t)$ est ≥ 0 , on a :

$$\phi_n(t) \leq \phi(t)$$

Si l'intégrale $\int_0^1 \phi(t) dt$ existe, on peut écrire :

$$S_n = \int_0^1 \phi_n(t) dt < \int_0^1 \phi(t) dt$$

La suite monotone croissante S_n a donc une limite, et ainsi la série $\sum u_n$ est convergente.

Si $\phi(t)$ n'est pas intégrable sur $[0, 1]$:

$$\int_0^1 \phi(t) dt = +\infty$$

A étant un nombre positif arbitrairement grand, il lui correspond un nombre a tel que :

$$\int_0^a \phi(t) dt > A$$

Il existe donc un nombre N tel que l'inégalité $n > N$ entraîne :

$$S_n > \int_0^1 \phi_n(t) dt$$

Par suite, $S_n \rightarrow +\infty$ avec n , et la série $\sum u_n$ est divergente.

THEOREME 43 -

α étant un entier fixe, $Y_n^\alpha - Y_n^{\alpha+1} \xrightarrow[p.c.o.]{} 0$ si et seulement si $F(x) \in \mathcal{H}$.

Démonstration.

Il nous suffit de prouver que $F(x) \in \mathcal{H}$ si $Y_n^\alpha - Y_n^{\alpha+1} \xrightarrow[p.c.o.]{} 0$.

En appelant $H_n^*(x)$ la f. d. r. de $Y_n^\alpha - Y_n^{\alpha+1}$, on a (Cf th. 27) :

$$1 - H_n^*(x) = \frac{n!}{(n - \alpha - 1)! \alpha!} \int_{-\infty}^{+\infty} F^{n-\alpha-1}(v) G^\alpha(v+x) dF(v)$$

La convergence p.c.o. de $Y_n^\alpha - Y_n^{\alpha+1}$ vers 0 équivaut à :

$$\sum_{n=1}^{\infty} [1 - H_n^*(h)] < \alpha \quad \text{pour tout } h > 0$$

Posons :

$$u_n = \alpha! [1 - H_n^*(h)] = \int_{-\infty}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-\alpha) F^{n-\alpha-1}(v) G^\alpha(v+h) dF(v)$$

Le changement de variable : $v = F^{-1}(t)$ nous donne :

$$u_n = \int_0^1 n(n-1) \dots (n-\alpha) t^{n-\alpha-1} G^\alpha[F^{-1}(t)+h] dt$$

Il est facile de voir que la fonction $f_n(t)$ que l'on intègre vérifie les conditions du lemme précédent. On a, pour tout $t < 1$:

$$\sum n(n-1) \dots (n-\alpha) t^{n-\alpha-1} G^\alpha[F^{-1}(t)+h] = \frac{(\alpha+1)! G^\alpha[F^{-1}(t)+h]}{(1-t)^{\alpha+2}}$$

La série (u_n) est donc de même nature que l'intégrale :

$$M = \int_0^1 \frac{G^\alpha[F^{-1}(t)+h]}{(1-t)^{\alpha+2}} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G^\alpha(v+h)}{G^{\alpha+2}(v)} dF(v)$$

Nous achèverons la démonstration en montrant que l'existence de M , quel que soit h , entraîne l'existence de :

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G^{\alpha+1}(x)}{G^{\alpha+2}(x-h)} dF(x)$$

Si l'on remplace v par $x-h$ dans M , cette intégrale devient :

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G^{\alpha+1}(x)}{G^{\alpha+2}(x-h)} dF(x-h)$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G^{\alpha}(x) dF(x-h)}{G^{\alpha+2}(x-h)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} G^{\alpha}(x) \frac{1}{\alpha+1} d \left[\frac{1}{G^{\alpha+1}(x-h)} \right] = \dots \\ &= \frac{G^{\alpha}(A)}{(\alpha+1) G^{\alpha+1}(A-h)} - \frac{1}{\alpha+1} + \frac{\alpha}{\alpha+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G^{\alpha-1}(x)}{G^{\alpha+1}(x-h)} dF(x) \end{aligned}$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{\alpha}{\alpha+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G^{\alpha-1}(x)}{G^{\alpha+1}(x-h)} dF(x) < \frac{1}{\alpha+1} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G^{\alpha}(x)}{G^{\alpha+2}(x-h)} dF(x-h)$$

L'existence de M entraîne donc celle de K.

C. Q. F. D.

Remarque.

Pour abréger, nous n'énoncerons pas les résultats analogues aux précédents et concernant les plus petites valeurs de l'échantillon Z_n^{β} .

VI - GENERATION DES FONCTIONS DE $\mathcal{H}$.

1/ - La fonction $V(x) = \text{Log} [-\text{Log} G(x)]$ est monotone croissante, et tend vers $+\infty$ avec x .

Or, pour que $F(x) \in \mathcal{H}$, il faut et il suffit que :

$$V(x+h) - V(x) \longrightarrow +\infty \text{ avec } x \text{ pour tout } h > 0.$$

Cette condition imposée à $V(x)$ est identique à la condition imposée à la fonction $W(x) = -\text{Log} G(x)$ au § XII du ch. 2, lors de la détermination des f. d. r. $F(x)$.

Les résultats obtenus pour $W(x)$ se traduiront donc aisément pour $V(x)$ sous la forme suivante :

THEOREME 44 -

Une sous famille $\mathcal{H}_1 \in \mathcal{H}$ est constituée par les f. d. r. $F(x)$ ayant, au moins pour les grandes valeurs de x , une densité $f(x)$ telle que :

$$V'(x) = \frac{f(x)}{G(x) \text{Log} G(x)} \longrightarrow -\infty \text{ quand } x \longrightarrow +\infty$$

THEOREME 45 -

Si une f. d. r. $F_1(x)$ appartient à $\mathcal{H}_1$, toute f. d. r. associée $F(x)$ appartient à $\mathcal{H}$.

Réciproquement, à toute f. d. r. $F(x) \in \mathcal{H}$, on peut associer - et même d'une infinité de façons - une f. d. r. $F_1(x) \in \mathcal{H}_1$.

La définition du terme "associée" a été donnée au ch. 2, § XII.

2/ - Pour achever cette étude, nous allons expliciter la forme d'une famille de lois appartenant à $\mathcal{H}$.

Si $F(x) \in \mathcal{H}$, on a :

$$\text{Log } W(x) - \text{Log } W(x-1) \longrightarrow +\infty \quad \text{quand } x \longrightarrow +\infty.$$

De là résulte que $\text{Log } W(x)/x \longrightarrow +\infty$ avec x .

Posons : $\text{Log } W(x) = x a(x)$. On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = +\infty$

Si $a(x)$ est monotone non décroissante pour $x > x_0$, la fonction $F(x)$ correspondante appartient à $\mathcal{H}$. En effet, l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} \text{Log } W(x) - \text{Log } W(x-\varepsilon) &= x a(x) - (x-\varepsilon) a(x-\varepsilon) \\ &\geq x a(x) - (x-\varepsilon) a(x) = \varepsilon a(x) \end{aligned}$$

Ainsi, les f. d. r. du type :

$$F(x) = 1 - \exp \left(- e^{x a(x)} \right)$$

où $a(x) \longrightarrow +\infty$ avec x en croissant, appartiennent à $\mathcal{H}$.

Notons que si $a(x)$ est constante, $F(x) \notin \mathcal{H}$.

C - STABILITE RELATIVE PRESQUE COMPLETE DES VALEURS EXTREMES -

Nous dirons que Y_n est relativement stable p. co. s'il existe une suite certaine a_n telle que $\frac{Y_n}{a_n} \xrightarrow[p. co.]{n \rightarrow \infty} 1$ quand $n \rightarrow \infty$.

En conservant les notations du chapitre 2, nous voyons que la stabilité relative p. co. de Y_n équivaut à la stabilité (absolue) p. co. de $\text{Log } Y_n$. Cela nous fournit le moyen de déduire, de toute propriété établie pour la stabilité p. co., une propriété correspondante pour la stabilité relative p. co.

Nous indiquerons seulement les deux résultats suivants :

THEOREME 46 -

 $F(x) \in \mathcal{H}_r$ si :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x)}{G(x) \operatorname{Log} G(x)} = -\infty$$

($\mathcal{H}_r$ est la famille des f. d. r. pour lesquelles Y_n est relativement stable p. co.).

THEOREME 47 -

α étant un entier fixe, $Y_n^\alpha / Y_n^{\alpha+1} \xrightarrow{\text{p. co.}} 1$ si et seulement si $F(x) \in \mathcal{H}_r$.

CHAPITRE IV

STABILITÉ PRESQUE SURE DES VALEURS EXTRÊMES D'UN ÉCHANTILLON

I - STABILITE PRESQUE SURE DE Y_n -

1/ - Etant donné une suite infinie de v.a. indépendantes $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ toutes de même loi $F(x)$, nous posons comme précédemment :

$$Y_n = \text{Max. } \{ X_1, X_2, \dots, X_n \}$$

Il est clair que les variables $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ ne sont pas indépendantes ; la loi de Y_{n+1} est modifiée par la connaissance de Y_n .

Nous dirons que Y_n est stable presque sûrement s'il existe une suite certaine a_n telle que :

$$Y_n - a_n \xrightarrow[p.s.]{} 0$$

Sous une autre forme, Y_n est stable presque sûrement si et seulement si l'on a, pour tout $\epsilon > 0$:

$$Y_n <<_{p.s.} a_n + \epsilon \quad (\text{Condition } C^+)$$

$$a_n - \epsilon <<_{p.s.} Y_n \quad (\text{Condition } C^-)$$

Nous appellerons $\mathcal{K}$ l'ensemble des f.d.r. $F(x)$ pour lesquelles Y_n est stable p.s.

2/ - Etude de la condition C^+

La relation : $Y_n - a_n \xrightarrow[p.s.]{} 0$

entraînant : $Y_n - a_n \xrightarrow[p]{} 0,$

nous pouvons choisir : $a_n = G^{-1}(\frac{1}{n}).$

C^+ est une condition de majoration presque sûre de Y_n par :

$$B(n) = G^{-1} \left(\frac{1}{n} \right) + \varepsilon$$

$$\text{Si l'on pose : } B(t) = G^{-1} \left(\frac{1}{t} \right) + \varepsilon$$

$$\text{on a : } B^{-1}(x) = \frac{1}{G(x - \varepsilon)}$$

et le théorème 7 du chapitre 1 nous montre que la condition G^+ équivaut à l'existence, pour tout $\varepsilon > 0$, de l'intégrale :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF(x)}{G(x - \varepsilon)} = E \left\{ \frac{1}{G(x - \varepsilon)} \right\}$$

Considérons alors le rapport :

$$r(x) = \frac{G(x - \varepsilon)}{G(x) \operatorname{Log} G(x)}$$

on peut écrire :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF(x)}{r(x) G(x) \operatorname{Log} G(x)}$$

Si I existe, $r(x)$ n'est pas borné inférieurement quand $x \rightarrow +\infty$. En effet, supposons que l'on ait, au contraire, $r(x) > -A$ quand $x > x_0$. Il en résulterait :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{dF(x)}{r(x) G(x) \operatorname{Log} G(x)} &= \int_{x_0}^x \frac{1}{-r(x)} d[\operatorname{Log} \operatorname{Log} G(x)] \\ &> \int_{x_0}^x \frac{1}{A} d[\operatorname{Log} |\operatorname{Log} G(x)|] = \frac{1}{A} \operatorname{Log} \left[\frac{\operatorname{Log} G(x)}{\operatorname{Log} G(x_0)} \right] \end{aligned}$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, le second membre de cette inégalité croît indéfiniment et par suite l'hypothèse faite implique $I = +\infty$.

Il existe donc bien, si $I < \infty$, une suite de valeurs croissantes de $x : x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ telle que $x_n \rightarrow +\infty$ avec n , et que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r(x_n) = -\infty \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0$$

Cette propriété nous suggère d'introduire une certaine famille $\mathcal{H}_1$ de f. d. r., définie comme suit :

Définition :

Nous appellerons $\mathcal{H}_1$ la famille des f. d. r. $F(x)$ telles que, pour tout $\varepsilon > 0$, on ait :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x - \varepsilon)}{G(x) \operatorname{Log} G(x)} = -\infty$$

Cela peut encore s'écrire, en utilisant la fonction $W(x) = -\operatorname{Log} G$:

$$W(x) - W(x - \varepsilon) - \operatorname{Log} W(x) \rightarrow +\infty \text{ avec } x \quad (\text{Condition } \Gamma)$$

Lemme 48.

La condition Γ équivaut à la condition Γ' :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [W(x) - W(x - \varepsilon) - \operatorname{Log} W(x - \varepsilon)] = +\infty \text{ quel que soit } \varepsilon > 0$$

Démonstration.

Il est clair que Γ implique Γ' . Établissons la réciproque. Supposons alors que Γ' soit vérifiée, et que Γ ne le soit pas. Dans ce cas, il existe deux nombres ε et A , et une suite indéfiniment croissante x_i , tels que :

$$W(x_i) - W(x_i - \varepsilon) - \operatorname{Log} W(x_i) < A \quad (i = 1, 2, \dots, n, \dots)$$

Mais, puisque Γ' est vérifiée :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} [W(x_i) - W(x_i - \varepsilon) - \operatorname{Log} W(x_i - \varepsilon)] = +\infty$$

On en déduit :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} [\operatorname{Log} W(x_i) - \operatorname{Log} W(x_i - \varepsilon)] = +\infty$$

ou :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{W(x_i)}{W(x_i - \varepsilon)} = +\infty$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} [W(x_i) - W(x_i - \varepsilon) - \operatorname{Log} W(x_i)] &= \dots \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left\{ W(x_i) \left[1 - \frac{W(x_i - \varepsilon)}{W(x_i)} - \frac{\operatorname{Log} W(x_i)}{W(x_i)} \right] \right\} = +\infty \end{aligned}$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. Conclusion : si Γ' est vérifiée, Γ l'est aussi.

On verrait de la même façon que les deux conditions :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [W(x) - W(x - \varepsilon) - n \operatorname{Log} W(x)] &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [W(x) - W(x - \varepsilon) - n \operatorname{Log} W(x - \varepsilon)] &= +\infty \end{aligned}$$

où n est un nombre quelconque > 0 , sont équivalentes.

Elles sont encore équivalentes à la condition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [W(x) - W(x - \varepsilon) - n \operatorname{Log} W(\xi)] = +\infty$$

ξ étant un nombre choisi arbitrairement entre $x - \varepsilon$ et x .

THEOREME 48 -

$F(x) \in \mathcal{K}_1$ si et seulement si, quels que soient les nombres positifs n (entier) et ε , on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [W(x) - W(x - \varepsilon) - n \operatorname{Log} W(x)] = +\infty$$

Démonstration.

Cette condition entraîne manifestement Γ . Montrons qu'elle est aussi conséquence de Γ . Si Γ est vérifiée, on a, quel que soit $\varepsilon > 0$ et l'entier n , pour x tendant vers $+\infty$:

$$W(x) - W(x - \frac{\varepsilon}{n}) - \operatorname{Log} W(x - \frac{\varepsilon}{n}) \longrightarrow +\infty$$

$$W(x - \frac{\varepsilon}{n}) - W(x - \frac{2\varepsilon}{n}) - \operatorname{Log} W(x - \frac{2\varepsilon}{n}) \longrightarrow +\infty$$

.....

$$W(x - \frac{n-1}{n} \varepsilon) - W(x - \varepsilon) - \operatorname{Log} W(x - \varepsilon) \longrightarrow +\infty$$

On déduit de ces relations :

$$W(x) - W(x - \varepsilon) - [\operatorname{Log} W(x - \frac{\varepsilon}{n}) + \operatorname{Log} W(x - \frac{2\varepsilon}{n}) + \dots + \operatorname{Log} W(x - \varepsilon)] \longrightarrow +\infty,$$

et enfin :
$$W(x) - W(x - \varepsilon) - n \operatorname{Log} W(x - \varepsilon) \longrightarrow +\infty$$

En vertu de la remarque faite plus haut, ceci entraîne :

$$W(x) - W(x - \varepsilon) - n \operatorname{Log} W(x) \longrightarrow +\infty \quad \text{C. Q. F. D.}$$

THEOREME 49 -

Toute fonction $F(x)$ de $\mathcal{K}_1$ vérifie la condition C^+ .

Démonstration.

En effet, si $F(x) \in \mathcal{K}_1$, le théorème précédent nous permet d'écrire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [W(x) - W(x - \varepsilon) - 2 \operatorname{Log} W(x)] = +\infty$$

quel que soit $\varepsilon > 0$, ou :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x - \varepsilon)}{G(x) [\operatorname{Log} G(x)]^2} = +\infty$$

On a alors, en choisissant x_0 assez grand :

$$\int_{x_0}^x \frac{dF(x)}{G(x - \varepsilon)} < \int_{x_0}^x \frac{-dG(x)}{G(x) [\operatorname{Log} G(x)]^2} = \frac{1}{\operatorname{Log} G(x)} - \frac{1}{\operatorname{Log} G(x_0)}$$

Le second membre de cette inégalité étant majoré, le premier membre a une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$, et par suite $E\{\frac{1}{G(x - \varepsilon)}\}$ existe. La condition C^+ est donc satisfaite.

3/ - Etude de la condition C^- .

THEOREME 50 -

Toute fonction $F(x)$ de $\mathcal{K}_1$ vérifie C^- .

Démonstration.

La condition : $a_n - \varepsilon \ll_{p.c.o.} Y_n$ pour tout $\varepsilon > 0$ est plus restrictive que C^- . Or, nous avons vu au chapitre 3 qu'elle équivaut à :

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{G(x - \varepsilon)}{G(x)}\right) \frac{1}{G^2(x)} dF(x)$$

Il est facile de voir que, si $F(x) \in \mathcal{K}_1$, on a pour x assez grand :

$$\exp\left(-\frac{G(x - \varepsilon)}{G(x)}\right) \frac{1}{G^2(x)} < \frac{1}{G(x - \varepsilon)}$$

En effet, cela s'écrit :

$$\frac{G(x - \varepsilon)}{G(x)} - 2 \operatorname{Log} G(x) < -\operatorname{Log} G(x - \varepsilon)$$

et cette inégalité sera à fortiori exacte si :

$$\frac{G(x - \varepsilon)}{G(x) \operatorname{Log} G(x)} < -2$$

Mais cette relation est bien vérifiée pour $x > x_0$, puisque $F(x) \in \mathcal{K}_1$.

Corollaire 50.

L'on a : $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}$

C'est une conséquence immédiate des deux derniers théorèmes.

4/ - Relation entre $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}_1$.

Nous allons préciser un peu la relation d'inclusion $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}$ en montrant que $\mathcal{K}_1$ contient les fonctions de $\mathcal{K}$ qui sont en quelque sorte les plus régulières.

THEOREME 51 -

Etant donné une fonction $F(x) \in \mathcal{K}$, supposons qu'à tout nombre $\varepsilon > 0$ corresponde un nombre $x_0(\varepsilon)$ tel que $G(x)/G(x - \varepsilon)$ soit monotone non croissant pour $x > x_0(\varepsilon)$.

Dans ces conditions, on a aussi : $F(x) \in \mathcal{K}_1$.

Démonstration.

Puisque $F(x) \in \mathcal{K}$, nous savons que $G(x)/G(x - \varepsilon) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$ et que :

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF(x)}{G(x - \varepsilon)} < \infty$$

Or, on peut écrire :

$$\int_{x_0}^A \frac{dF(x)}{G(x - \varepsilon)} = \int_{x_0}^A \frac{G(x)}{G(x - \varepsilon)} - \frac{dG(x)}{G(x)} - \int_{x_0}^A \frac{G(x)}{G(x - \varepsilon)} - d\log G(x)$$

et compte tenu de la monotonie de $G(x)/G(x - \varepsilon)$:

$$\int_{x_0}^A \frac{G(x)}{G(x - \varepsilon)} - d\log G(x) \leq \frac{G(A)}{G(A - \varepsilon)} [\log G(x_0) - \log G(A)]$$

Il résulte de cette inégalité que l'expression :

$$\frac{G(A) \log G(A)}{G(A - \varepsilon)}$$

est bornée pour $A \gg x_0$, donc que :

$$\frac{G(x) \log G(x)}{G(x - \varepsilon)} \rightarrow 0$$

quand $x \rightarrow +\infty$.

C. Q. F. D.

Remarquons que la condition imposée au rapport $G(x)/G(x - \varepsilon)$ est satisfaite si la fonction $W(x) = -\log G(x)$ est concave pour x supérieur à une certaine valeur.

Nous n'avons pu résoudre le problème de savoir si les deux familles $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}_1$ sont effectivement distinctes.

II - STABILITE PRESQUE SURE DE Y_n^α .

Nous avons vu (Cf ch. 3 § II) que l'on a :

$$a_n - \varepsilon << Y_n^{\alpha}_{p.c.o.} \quad (\text{avec } a_n = G^{-1}(\frac{1}{n}))$$

$$\text{si :} \quad L = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(- \frac{G(x - \varepsilon)}{2 G(x)} \right) \frac{1}{G^2(x)} dF(x) < \infty$$

Mais on peut démontrer, comme au § I, n° 3, que L existe pour tout $\varepsilon > 0$ si $F(x) \in \mathcal{K}_1$. D'autre part, il est évident que, si $F(x) \in \mathcal{K}_1$, on a :

$$Y_n^{\alpha} << a_n + \varepsilon \quad \text{quel que soit } \varepsilon > 0,$$

Résumons ces deux résultats :

THEOREME 52 -

Si $F(x) \in \mathcal{K}_1$, Y_n^α est stable presque sûrement pour toute valeur fixe de α . De plus, on a alors :

$$Y_n^1 - Y_n^{\alpha}_{p.s.} \rightarrow 0$$

ce qui revient à dire que les mailles extrêmes de l'échantillon se resserrent indéfiniment presque sûrement :

III - GENERATION DES FONCTIONS DE $\mathcal{K}_1$.

1/ - Rappelons la terminologie introduite au § 12 du chapitre 2 :

- Une suite (x_n) est du type $\mathcal{S}$ si elle est monotone croissante x_n tendant vers $+\infty$ tandis que $x_{n+1} - x_n \rightarrow 0$.

- Une fonction $F(x)$ est associée à une fonction $F_1(x)$ si elle prend la même valeur pour une infinité de valeurs de x formant une suite $\mathcal{S}$.

Nous allons montrer comment les fonctions de $\mathcal{K}_1$ peuvent se déduire d'une sous-famille $\mathcal{K}_2$ caractérisée plus simplement.

2/ - THEOREME 53 -

Soit, $\mathcal{K}_2$ la famille des f. d. r. $F(x)$ telles que :

$$\frac{W'(x)}{\text{Log } W(x)} = \frac{f(x)}{G(x) \text{ Log } |\text{Log } G(x)|} \rightarrow +\infty \text{ avec } x$$

$\mathcal{K}_2$ est contenue dans $\mathcal{K}_1$.

Démonstration.

En effet, étant donné une fonction $F(x) \in \mathcal{K}_2$, prenons un nombre positif ε quelconque. A tout nombre x correspond un nombre ξ tel que :

$$W(x) - W(x - \varepsilon) = \varepsilon W'(\xi) \quad x - \varepsilon < \xi < x$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, $\xi \rightarrow +\infty$ ainsi que $W'(\xi)$, et l'on a :

$$\begin{aligned} \text{Lim. } [W(x) - W(x - \varepsilon) - \text{Log } W(x - \varepsilon)] &= \text{Lim. } [\varepsilon W'(\xi) - \text{Log } W(x - \varepsilon)] \\ &> \text{Lim. } [\varepsilon W'(\xi) - \text{Log } W(\xi)] = +\infty \end{aligned}$$

$F(x)$ vérifie donc la condition Γ' et par suite elle appartient à $\mathcal{K}_1$.

3/ - THEOREME 54 -

a) Toute f. d. r. $F_1(x)$ associée à une fonction de $\mathcal{K}_2$ appartient à $\mathcal{K}_1$.

b) Toute f. d. r. $F_1(x) \in \mathcal{K}_1$ peut être associée à une f. d. r. $F(x) \in \mathcal{K}_2$.

Démonstration.

a) Supposons que la f. d. r. $F_1(x)$ soit associée à la f. d. r. $F(x) \in \mathcal{K}_2$. Il existe alors une suite x_n du type $\mathfrak{S}$ telle que :

$$F_1(x_n) = F(x_n) \quad \text{pour tout } n.$$

Prenons arbitrairement un nombre $\varepsilon > 0$. A toute valeur de x suffisamment grande, il correspond deux nombres x_p et x_q de la suite x_n , tels que :

$$x_{p-1} < x - \varepsilon < x_p < x_1 < x < x_{q+1}$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} W_1(x) - W_1(x - \varepsilon) - \text{Log } W_1(x - \varepsilon) &\geq W_1(x_q) - W_1(x_p) - \text{Log } W_1(x_p) \\ &= W(x_q) - W(x_p) - \text{Log } W(x_p) \end{aligned}$$

Quand $x \rightarrow \infty$, $x - x_q \rightarrow 0$ et $x_p - (x - \varepsilon) \rightarrow 0$.

On a donc, pour x assez grand : $x_q > x_p + \frac{\varepsilon}{2}$

$$\text{et : } W_1(x) - W_1(x - \varepsilon) - \text{Log } W_1(x - \varepsilon) \geq W(x_p + \frac{\varepsilon}{2}) - W(x_p) - \text{Log } W(x_p)$$

Le second membre est infiniment grand avec x , puisque $F(x) \in \mathcal{H}_1$ donc le premier membre aussi.

$F_1(x)$ vérifiant Γ' , elle appartient bien à $\mathcal{H}_1$.

b) Soit $F_1(x)$ une fonction de $\mathcal{H}_1$. Quel que soit $h > 0$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [W_1(x+h) - W_1(x) - \text{Log } W_1(x+h)] = +\infty$$

Par conséquent, il existe une suite (x_n) du type $\mathcal{S}$ telle que :

$$W_1(x_{n+1}) - W_1(x_n) - \text{Log } W_1(x_{n+1}) \rightarrow +\infty \text{ avec } n \quad (1)$$

Appelons $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ les points de coordonnées :

$$[x_1, W_1(x_1)], [x_2, W_1(x_2)], \dots [x_n, W_1(x_n)] \dots$$

Soit $W_0(x)$ la fonction dont le graphique est formé par la ligne polygonale $M_1 M_2 \dots M_n \dots$. Elle est monotone non décroissante, et tend vers $+\infty$ avec x . Il existe donc une f. d. r. $F_0(x)$ telle que :

$$-\text{Log } [1 - F_0(x)] = W_0(x).$$

Les pentes des droites $M_n M_{n+1}$ croissent indéfiniment avec n . En effet, p_n étant la pente $M_n M_{n+1}$:

$$W_1(x_{n+1}) - W_1(x_n) = p_n(x_{n+1} - x_n)$$

D'après la condition (1) on a :

$$p_n(x_{n+1} - x_n) \rightarrow +\infty$$

ce qui entraîne : $p_n \rightarrow +\infty$, puisque : $x_{n+1} - x_n \rightarrow +0$.

De plus, on a, toujours d'après (1) :

$$p_n / \text{Log } W_1(x_{n+1}) \rightarrow +\infty.$$

Appelons maintenant $W(x)$ la fonction obtenue en substituant à l'une

des deux cordes $M_{n-1}M_n$ et M_nM_{n+1} , au voisinage de M_n , un petit arc $M_n\mu_n$ comme il a été indiqué au § 12 du ch. 2.

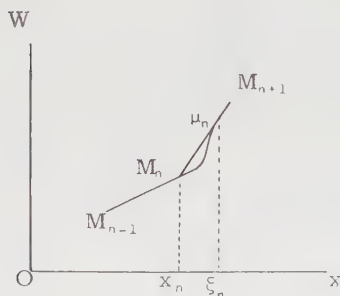


Fig. 1

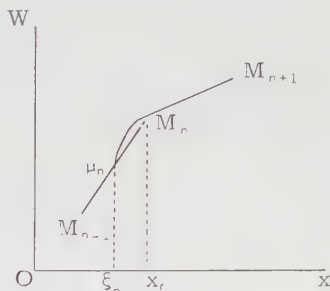


Fig. 2

On sait que la pente d'une tangente à cet arc est supérieure à : $\text{Min. } \{ p_{n-1}, p_n \}$, et l'on peut toujours le choisir assez petit pour que :

$$\text{Log } W(\xi_n) / \text{Log } W(x_n) \rightarrow 1 \quad (\xi_n = \text{abscisse de } \mu_n)$$

La fonction $W(x)$ a une dérivée pour toute valeur de x .

- Si $x \in [x_n, x_{n+1}] - [x_n, \xi_n] - [x_{n+1}, \xi_{n+1}]$: $W'(x) = p$.

- Si $x \in [x_n, \xi_n]$: $W'(x) \geq \text{Min. } \{ p_{n-1}, p_n \}$

Dans le premier cas :

$$\frac{W'(x)}{\text{Log } W(x)} > \frac{p}{\text{Log } W(x_{n+1})}$$

Dans le deuxième cas :

$$\frac{W'(x)}{\text{Log } W(x)} > \frac{p_n}{\text{Log } W(x_n)} \quad \text{ou} : \quad \frac{W'(x)}{\text{Log } W(x)} > \frac{p_{n+1}}{\text{Log } W(\xi_n)}$$

fig. 1

fig. 2

Il en résulte que $\frac{W'(x)}{\text{Log } W(x)} \rightarrow +\infty$ avec x , donc que $F(x)$ appartient à $\mathcal{K}_j$.

C. Q. F. D.

4/ - THEOREME 55 -

Ecrivons $F(x)$ sous la forme :

$$F(x) = 1 - \exp [-x \cdot \text{Log } x \cdot a(x)] \quad \text{avec } a(x) > 0$$

On a alors : $F(x) \in \mathcal{H}_1$ si $a(x)$ est monotone non décroissante pour x assez grand, et tend vers $+\infty$ avec x .

$F(x) \notin \mathcal{H}$ si a est fixe, ou non croissant pour x assez grand.

Démonstration.

Etablissons le premier point. On a ici : $W(x) = x a(x) \text{Log } x$. Il nous suffit de prouver que la condition Γ' est satisfaite, c'est-à-dire que, quel que soit $h > 0$:

$$\delta(x) = (x+h)a(x+h)L(x+h) - xa(x)Lx - Lx - LLx - La(x) \longrightarrow +\infty \text{ avec } x$$

Cette expression peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \delta(x) = & \left(x \underbrace{Lx [a(x+h) - a(x)]}_{A} \right) + \left(x \underbrace{a(x+h) L(1 + \frac{h}{x}) - La(x)}_B \right) \\ & + \left(h \underbrace{a(x+h) L(x+h) - Lx - LLx}_C \right) \end{aligned}$$

On a d'abord : $A \geq 0$ (pour $x > x_0$)

Puis : $B > \frac{h}{2} a(x+h) - La(x) \sim \frac{h}{2} a(x+h) \longrightarrow +\infty$

Et enfin : $C > h a(x+h) Lx - 2Lx \sim h a(x+h) Lx \longrightarrow +\infty$

Donc : $\delta(x) \longrightarrow +\infty$ avec x . C. Q. F. D.

Pour établir le second point, il nous suffit de montrer que $\delta(x)$ est majoré pour $x > x_0$ (Cf § I, n° 2) si $a(x)$ est non croissante. Or, on a maintenant :

$$A \leq 0$$

$$B < b - La(x) \quad (b = \text{constante})$$

$$C < h a(x) Lx - Lx - LLx + c \quad (c = \text{constante})$$

D'où : $\delta(x) < b + c + h. a(x). Lx - L [x. a(x). Lx]$

La fonction $a(x)$ vérifie nécessairement la condition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x a(x) Lx = +\infty$$

Il en résulte que si le produit $a(x) Lx$ est majoré pour une suite x_i de valeurs de x qui tendent vers $+\infty$ avec i , la suite $\delta(x_i)$ tend vers $-\infty$.

Si $a(x) Lx \rightarrow +\infty$ pour une telle suite x_i , on a :

$$\delta(x_i) < b + c - Lx_i [1 - h \cdot a(x_i)] = L[a(x_i) Lx_i]$$

En choisissant h assez petit pour que : $1 - h \cdot a(x_i) > 0$

on a encore : $\delta(x_i) \rightarrow -\infty$

Finalement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \delta(x) = -\infty$

ce qui implique : $F(x) \notin \mathcal{K}$

5/ - Considérons les lois de probabilité dont la densité est de la forme : $f(x) = \exp(-x^a)$, où a est une constante positive. Nous savons que ces lois n'appartiennent pas à $\mathcal{T}$ si $a \leq 1$; à fortiori, elles n'appartiennent pas non plus à $\mathcal{K}$.

Supposons alors que $a > 1$. On a :

$$G(x) = \int_x^{+\infty} \exp(-x^a) dx \sim \frac{\exp(-x^a)}{a x^{a-1}}$$

et : $L |L G(x)| \sim a Lx$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{G(x) L |L G(x)|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{a-1}}{Lx} = +\infty$$

Par suite, $F(x) \in \mathcal{K}$ quel que soit $a > 1$ (on a même $F \in \mathcal{K}_2$).

Cas de la loi de Laplace-Gauss.

Cette loi appartient à $\mathcal{K}$, puisqu'elle correspond à $a = 2$. Ainsi, les valeurs extrêmes d'un échantillon de Laplace-Gauss sont stables presque sûrement (ceci étant valable aussi bien pour les plus petites valeurs que pour les plus grandes).

De plus, ses mailles extrêmes se resserrent indéfiniment presque sûrement.

On en déduit que le milieu d'un tel échantillon :

$$M_n = \frac{1}{2} (Y_n + Z_n)$$

converge presque sûrement vers la moyenne $\bar{X}$ de X .

α et β étant fixes, on a également :

$$\frac{1}{2} (Y_n^\alpha \vdash Z_n^\beta) \xrightarrow[p.s.]{\quad} \bar{X}$$

IV - STABILITE RELATIVE PRESQUE SURE -

Y_n est relativement stable presque sûrement s'il existe une suite certaine a_n telle que :

$$Y_n/a_n \xrightarrow[p.s.]{\quad} 1 \quad \text{quand } n \rightarrow \omega$$

On obtiendrait des propriétés de ce mode de stabilité en utilisant le fait que si Y_n est relativement stable p. s. , $\text{Log } \hat{Y}_n$ est stable p. s. (et réciproquement).

Par exemple, pour que Y_n soit relativement stable p. s. , il suffit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f(x)}{G(x) \text{Log} |\text{Log } G(x)|} = +\infty$$

De là on déduit que la plus grande valeur d'un échantillon de la 1ère loi de Laplace ($f(x) = e^{-|x|}$) est relativement stable presque sûrement.

CHAPITRE V

QUELQUES CONSIDÉRATIONS SUR LA NOTION D'INDÉPENDANCE LIMITE DE DEUX VARIABLES ALÉATOIRES, APPLICATION A L'ÉTUDE DE LA STABILITÉ DU MILIEU ET DE L'ÉTENDUE D'UN ÉCHANTILLON

A - INDEPENDANCE LIMITE D'UN COUPLE ALEATOIRE -

I - PRELIMINAIRES -

Il est bien connu que si deux variables aléatoires X_n et Y_n sont stables suivant le mode $\mathcal{M}$ (en probabilité, presque sûrement, presque complètement) leur somme est stable suivant le même mode. Nous avons rappelé (cf. th. 19 & 36) dans le cas de la stabilité en probabilité et de la stabilité p. co. que la réciproque est exacte si X_n et Y_n sont indépendantes.

Cette hypothèse d'indépendance jouait un très grand rôle dans nos deux démonstrations. Malheureusement, les valeurs extrêmes d'un échantillon ne sont jamais indépendantes, et les deux théorèmes précédents ne peuvent ainsi s'appliquer à l'étude de la stabilité du milieu ou de l'étendue d'un échantillon. Le problème s'est donc posé d'assouplir la condition d'indépendance, et en particulier, de lui substituer une condition d'indépendance limite.

Il nous a semblé que ce terme d'"indépendance limite", bien qu'assez souvent employé, n'avait pas un sens clairement explicité et même, qu'il avait des sens différents suivant les auteurs. De toute façon, afin de démontrer certaines propositions, nous avons été obligé d'introduire des modes d'indépendance limite non classiques. Nous en indiquons trois dans ce chapitre, mais il est évident que l'on peut en imaginer bien d'autres : le tout est de savoir si les définitions adoptées sont vraiment utiles et efficaces.

II - DISTANCE DE DEUX LOIS DE PROBABILITE A DEUX VARIABLES -

Nos définitions de l'indépendance limite reposent sur la notion de distance entre deux lois de probabilité, ce qui est tout naturel puisque cette notion permet d'exprimer que deux lois sont "très voisines", ou "aussi voisines qu'on le veut".

On sait qu'il existe de multiples façons de définir la distance δ de deux répartitions, cette distance étant telle que la convergence en loi d'une f. d. r. F_n vers une autre F soit caractérisée par :

$$\delta(F, F_n) \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

Nous emploierons ici l'analogie, pour des lois à deux variables de la distance définie par M. Paul Lévy dans le cas des lois à une seule variable. Voici quelques indications sur cette norme.

1/ - Soit $z = F(x, y)$ la surface de répartition d'une certaine loi à deux variables X, Y . En la complétant éventuellement par des portions de plans parallèles à zOx ou zOy , on obtient une surface continue S_F .

Considérons alors deux surfaces S_F et $S_{F'}$. Une droite d'équations :

$$z = -x + a \quad ; \quad z = -y + b$$

les coupe respectivement en deux points M et M' . La longueur du segment MM' , comprise entre 0 et $\sqrt{3}$, varie continûment avec a et b ; son maximum sera, par définition, la distance des deux lois F et F' .

$$\delta(F, F') = \text{Max. } (MM')$$

2/ - $\delta(F, F')$ possède les deux propriétés suivantes :

a) La relation :

$$F_n(x, y) \xrightarrow{L} F(x, y)$$

équivalent à : $\delta(F, F_n) \rightarrow 0$

b) L'inégalité :

$$\delta < \varepsilon \sqrt{3} \quad (1)$$

entraîne :

$$F(x - \varepsilon, y - \varepsilon) - \varepsilon < F_n(x, y) < F(x + \varepsilon, y + \varepsilon) + \varepsilon \quad (2)$$

quels que soient x et y .

Réciproquement, si les inégalités (2) sont vraies quels que soient x et y , on a :

$$\delta < \varepsilon \sqrt{3}$$

III - INDEPENDANCE ASYMPTOTIQUE GLOBALE -

1/ - Définition.

Soit $F_n(x, y)$ la f. d. r. d'un couple (X_n, Y_n) ; $A_n(x)$ la f. d. r. marginale de X_n et $B_n(y)$ la f. d. r. marginale de Y_n . Nous dirons que X_n et Y_n sont asymptotiquement globalement indépendantes si $\delta[F_n, A_n B_n]$ tend vers 0 avec $1/n$.

Observons que, si X_n et Y_n sont actuellement indépendantes, on a :

$$F_n(x, y) = A_n(x) B_n(y)$$

et par suite : $\delta[F_n, A_n B_n] = 0$

Exemple :

Si X_n et Y_n tendent vers 0 en probabilité, elles sont asymptotiquement globalement indépendantes.

2/ - La définition la plus répandue de l'indépendance limite est celle qui correspond au cas où $F_n(x, y) \xrightarrow{L^1} \mathcal{F}(x, y)$, les variables X et Y de loi $\mathcal{F}$ étant indépendantes ($\mathcal{F}(x, y) = \mathcal{A}(x) \mathcal{B}(y)$). Nous allons montrer que notre définition contient cette définition usuelle.

THEOREME 56 -

Si $F_n(x, y) \xrightarrow{L^1} \mathcal{F}(x, y) = \mathcal{A}(x) \mathcal{B}(y)$, X_n et Y_n sont asymptotiquement globalement indépendantes.

Démonstration.

Puisque $\delta(F_n, \mathcal{F}) \rightarrow 0$, on peut écrire, pour $n > n_\epsilon$, et quels que soient x et y :

$$\mathcal{F}(x - \epsilon, y - \epsilon) - \epsilon < F_n(x, y) < \mathcal{F}(x + \epsilon, y + \epsilon) + \epsilon$$

On en déduit :

$$\mathcal{F}(x - \epsilon, +\infty) - \epsilon < F_n(x, +\infty) < \mathcal{F}(x + \epsilon, +\infty) + \epsilon$$

$$\text{et} \quad \mathcal{F}(+\infty, y - \epsilon) - \epsilon < F_n(+\infty, y) < \mathcal{F}(+\infty, y + \epsilon) + \epsilon$$

$$\text{c'est-à-dire : } \mathcal{A}(x - \epsilon) - \epsilon < A_n(x) < \mathcal{A}(x + \epsilon) + \epsilon$$

$$\mathcal{B}(y - \epsilon) - \epsilon < B_n(y) < \mathcal{B}(y + \epsilon) + \epsilon$$

Il en résulte que $\delta(A_n, \mathcal{A}) \rightarrow 0$ et que $\delta(B_n, \mathcal{B}) \rightarrow 0$.

Les deux convergences légales de $A_n(x)$ et $B_n(y)$ vers $\mathcal{A}(x)$ et $\mathcal{B}(y)$ entraînent la convergence légale de $A_n(x)$, $B_n(y)$ vers $\mathcal{A}(x)$, $\mathcal{B}(y)$. On a donc :

$$\delta(\mathcal{A}\mathcal{B}, A_n B_n) \rightarrow 0$$

Mais, en vertu de l'inégalité triangulaire pour les distances :

$$\delta(F_n, A_n B_n) \leq \delta(F_n, \mathcal{A}\mathcal{B}) + \delta(\mathcal{A}\mathcal{B}, A_n B_n)$$

Par conséquent, $\delta(F_n, A_n B_n) \rightarrow 0$ et ainsi X_n et Y_n sont asymptotiquement globalement indépendantes.

Réciproque.

Si X_n et Y_n sont asymptotiquement globalement indépendantes, et si :

$$F_n(x, y) \xrightarrow{L^1} \bar{F}(x, y)$$

on a nécessairement :

$$\bar{F}(x, y) = \mathcal{A}(x) \cdot \mathcal{B}(y)$$

Cela résulte des trois relations :

$$\delta(\mathcal{A}\mathcal{B}, A_n B_n) \rightarrow 0$$

$$\delta(\bar{F}, F_n) \rightarrow 0 \quad ; \quad \delta(F_n, A_n B_n) \rightarrow 0$$

et de l'inégalité triangulaire.

3/ - THEOREME 57 -

Etant donné deux v. a. X_n et Y_n asymptotiquement globalement indépendantes, pour que $X_n + Y_n$ soit stable en probabilité, il faut et il suffit que X_n et Y_n le soient.

Démonstration.

La condition est suffisante. Montrons qu'elle est aussi nécessaire. La somme $Z_n = X_n + Y_n$ étant stable, si l'une des variables X_n , Y_n est stable, l'autre l'est également.

Supposons donc que Z_n soit stable, et montrons que X_n ne peut être instable.

D'après le théorème 17, si X_n est instable il existe un nombre $d > 0$ et une suite infinie ξ_n (définie pour des valeurs de n formant une suite $\mathcal{N}$) tels que :

$$A_n(\xi_n) \geq \alpha > 0 ; \quad 1 - A_n(\xi_n + d) \geq \beta > 0$$

où α et β sont deux constantes.

D'autre part, puisque Z_n est stable, il existe une suite z_n telle que, pour n assez grand :

$$\Pr \{ z_n \leq X_n + Y_n \leq z_n + \frac{d}{4} \} > 1 - \varepsilon$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit.

Considérons alors dans le plan (X_n, Y_n) le point de coordonnées :

$$x_n = \xi_n + \frac{d}{2} ; \quad y_n = z_n - (\xi_n + \frac{d}{2})$$

$$\text{On a : } F_n(x_n, y_n) < \varepsilon$$

$$A_n(x_n - \frac{d}{4}) \geq \alpha$$

$$B_n(y_n - \frac{d}{4}) > 1 - A_n(\xi_n + d) - \varepsilon \geq \beta - \varepsilon$$

$$\text{Donc, pour tout } \eta > 0 \text{ tel que } \eta < \frac{d}{4}$$

$$A_n(x_n - \eta) \geq \alpha ; \quad B_n(y_n - \eta) > \beta - \varepsilon$$

D'où :

$$A_n(x_n - \eta) B_n(y_n - \eta) > \alpha \beta - \varepsilon$$

et

$$A_n(x_n - \eta) B_n(y_n - \eta) > \alpha \beta - \varepsilon - \eta$$

Mais on peut toujours choisir ε et η assez petits pour que :

$$\alpha \beta - \varepsilon - \eta > \varepsilon .$$

On aurait alors, pour des valeurs de n suffisamment grandes appartenant à $\mathcal{N}$:

$$A_n(x_n - \eta) B_n(y_n - \eta) - \eta > F_n(x_n, y_n)$$

ce qui est incompatible avec l'indépendance asymptotique globale de X_n et Y_n . Il est donc bien impossible que X_n ne soit pas stable.

IV - INDEPENDANCE ASYMPTOTIQUE GLOBALE FORTE -

1/ - Dans notre note aux C. R. du 14 Octobre 1957, nous avons défini un mode d'indépendance limite globale, que nous appellerons ici "forte", et qui correspond à la convergence légale uniforme.

Définition.

X_n et Y_n tendent à devenir globalement fortement indépendantes si :

$$F_n(x, y) - A_n(x) B_n(y) \rightarrow 0 \quad \text{uniformément avec } 1/n.$$

En choisissant comme distance $d(F, F')$ l'expression :

$$d = \text{Max}_{(x, y)} | F(x, y) - F'(x, y) | ,$$

la condition précédente s'écrit :

$$d(F_n, A_n B_n) \rightarrow 0 \quad \text{avec } 1/n$$

On verrait aisément que si $F_n(x, y)$ a une limite continue de la forme $\mathcal{A}(x) \mathcal{B}(y)$, X_n et Y_n sont asymptotiquement globalement fortement indépendantes.

2/ - Considérons une application du plan (x_n, y_n) sur le plan (x'_n, y'_n) définie par :

$$x'_n = \varphi_n(x_n) \quad ; \quad y'_n = \psi_n(y_n)$$

où φ_n et ψ_n sont monotones (une telle application sera dite de la classe $\mathcal{A}$). L'indépendance as. globale (faible) de X_n et Y_n n'entraîne pas en général celle de X'_n et de Y'_n . On constate cela en remarquant que, quelle que soit la distribution du couple (X', Y') , les variables $X_n = X'/n$ et $Y_n = Y'/n$ sont as. glob. ind. Par contre, il est évident que l'indépendance asymptotique globale forte est conservée pour tout système d'applications de la classe $\mathcal{A}$. Donc, s'il existe un tel système d'applications conduisant à une loi limite pour le couple (x'_n, y'_n) , cette loi correspond nécessairement à deux variables x', y' , qui sont indépendantes

$$F_{n', n'}(x', y') \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F(x', y') = \varphi(x') \cdot \psi(y')$$

Il est d'ailleurs clair que l'existence d'une loi limite pour chacune des variables X'_n et Y'_n entraînera l'existence d'une loi limite pour le couple (X'_n, Y'_n) , cette dernière loi étant de la forme indiquée.

3/ - Critique de la notion d'indépendance limite globale.

Dire que Y_n est indépendant de X_n , c'est dire que la loi de Y_n est indépendante de toute information sur X_n . En particulier, on doit avoir :

$$\Pr \{ Y_n < y / X_n = x \} = \Pr \{ Y_n < y \}$$

relation qui, d'ailleurs exprime complètement l'indépendance de Y_n vis-à-vis de X_n .

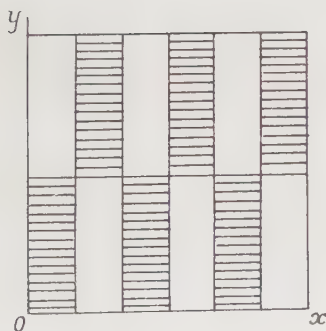
Il semblerait donc logique de dire que, si Y_n est as. indépendant de X_n , la loi de Y_n liée par $X_n = x$ diffère peu (le sens de cette expression étant fixé quand on a choisi une distance entre deux lois) de la loi marginale de Y_n pour n assez grand.

Or, cela n'a pas toujours lieu dans le cas de l'indépendance as. globale (forte ou faible). Nous allons le montrer sur un exemple.

Soit le carré : $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1$

Partageons-le en $4n$ rectangles égaux, délimités par les droites :

$$x = 0, \frac{1}{2n}, \frac{2}{2n}, \dots, 1 ; \quad y = 0, \frac{1}{2}, 1.$$



Choisissons $2n$ d'entre eux en prenant, dans la bande $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$, les rectangles de rang impair, et dans la bande $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$ les rectangles de rang pair. Dans le domaine ainsi obtenu, répartissons uniformément la probabilité unité. Il correspond à cette répartition une loi de probabilité pour le couple (X_n, Y_n) que nous appellerons $F_n(x, y)$.

Les lois marginales de X_n et de Y_n sont uniformes entre 0 et 1. Si k/n est la valeur approchée de x à $1/n$ près par défaut, on a toujours :

$$\frac{k}{n} y \leq F(x, y) < \frac{k+1}{n} y$$

En comparant ces inégalités à :

$$\frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n}$$

on obtient :

$$| F_n(x, y) - xy | < \frac{y}{n} \leq 1/n$$

Donc, $F_n(x, y)$ tend uniformément vers xy : il y a indépendance globale forte de X_n et Y_n .

D'autre part, la loi de Y_n liée par $X_n = x$ est uniforme entre 0 et $1/2$ pour un ensemble de valeurs de x de probabilité $1/2$; elle est uniforme entre $1/2$ et 1 pour un ensemble de valeurs de x de probabilité $1/2$.

Ainsi, le fait que nous signalions plus haut apparaît ici. Il est légitime d'en conclure à l'opportunité d'une définition de l'indépendance limite qui soit plus en accord avec le concept habituel d'indépendance que ne l'est l'indépendance asymptotique globale.

V - INDEPENDANCE ASYMPTOTIQUE STRICTE EN PROBABILITE -

1/ - Définition.

On dit que Y_n est asymptotiquement strictement indépendant de X_n en probabilité si la distance $\delta(x_n)$ entre la loi marginale de Y_n et la loi de Y_n liée par $X_n = x_n$ tend vers 0 en probabilité.

End'autres termes, si l'on appelle E_n l'ensemble des valeurs de x_n telles que $\delta(x_n) < \varepsilon$, on a :

$$\Pr \{ X_n \in E_n \} \longrightarrow 1 \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty \quad \text{quel que soit } \varepsilon > 0.$$

2/ - THEOREME 58 -

L'indépendance as. stricte en probabilité de Y_n vis-à-vis de X_n entraîne l'indépendance as. globale de X_n et Y_n .

Démonstration.

Soit $B_n(y)$ la loi marginale de Y_n , et $B_n(y; x)$ sa loi liée par $X_n = x$. Y_n étant strictement ind. de X_n en probabilité, à tout $\varepsilon > 0$ il correspond un entier n_ε tel que, en appelant E_n l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles :

$$\delta [B_n(y; x), B_n(y)] < \varepsilon$$

on ait :

$$\Pr \{ X_n \in E_n \} > 1 - \varepsilon \quad \text{quand } n > n_\varepsilon$$

Désignons par R l'intervalle $] -\infty, +\infty [$, R_x l'intervalle $] -\infty, x [$ et posons :

$$E'_n = R - E_n \quad ; \quad \mathcal{E}_n = E_n \cap R_x \quad ; \quad \mathcal{E}'_n = E'_n \cap R_x$$

Sur $\mathcal{E}_n$ on a :

$$B_n(y - \varepsilon) - \varepsilon < B_n(y; x) < B_n(y + \varepsilon) + \varepsilon \quad \text{pour } n > n_\varepsilon$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{E}_n} [B_n(y - \varepsilon) - \varepsilon] dA_n(x) &< \int_{\mathcal{E}_n} B_n(y; x) dA_n(x) \\ &< \int_{\mathcal{E}_n} [B_n(y + \varepsilon) + \varepsilon] dA_n(x) \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{E}_n^1} [B_n(y - \varepsilon) - \varepsilon] dA_n(x) &< \int_{\mathcal{E}_n^1} dA_n(x) < \varepsilon \\ 0 &< \int_{\mathcal{E}_n^1} B_n(y; x) dA_n(x) < \varepsilon ; \quad 0 < \int_{\mathcal{E}_n^1} [B_n(y + \varepsilon) + \varepsilon] dA_n(x) \end{aligned}$$

On en déduit, en remarquant que $\mathcal{E}_n + \mathcal{E}_n^1 = \mathbb{R}_x$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x [B_n(y - \varepsilon) - \varepsilon] dA_n(x) - \varepsilon &< \int_{-\infty}^x B_n(y; x) dA_n(x) \\ &< \int_{-\infty}^x [B_n(y + \varepsilon) + \varepsilon] dA_n(x) + \varepsilon \end{aligned}$$

Soit :

$$A_n(x) [B_n(y - \varepsilon) - \varepsilon] - \varepsilon < F_n(x, y) < A_n(x) [B_n(y + \varepsilon) + \varepsilon] + \varepsilon$$

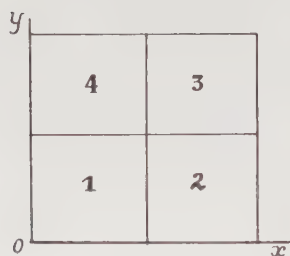
et à fortiori :

$$A_n(x - \varepsilon) B_n(y - \varepsilon) - 2\varepsilon < F_n(x, y) < A_n(x + \varepsilon) B_n(y + \varepsilon) + 2\varepsilon$$

Cette double inégalité, vraie pour $n > n_\varepsilon$ quels que soient x et y , prouve que X_n et Y_n sont as. glob. indépendantes.

3/ - La réciproque du théorème précédent est inexacte: X_n et Y_n peuvent être as. glob. ind. sans qu'aucune de ces deux variables soit strictement indépendante de l'autre en probabilité.

Nous vérifierons cela sur un exemple. Partageons le carré : $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ en quatre carrés égaux numérotés de 1 à 4 (voir figure). Dans chacun des carrés 2 et 4, répartissons uniformément une probabilité égale à $1/4$. Dans le carré 1, répartissons la probabilité $1/4$ de la même façon que nous avons réparti la probabilité unité dans l'exemple du § IV. Dans le carré 3, nous plaçons enfin la répartition déduite de celle du carré 1 par une rotation de $\frac{\pi}{2}$.



Considérons le couple (X_n, Y_n) associé à la répartition totale obtenue. On a :

$$A_n(x) = x ; \quad B_n(y) = y ; \quad F_n(x, y) \xrightarrow{u} xy$$

Ily a donc bien ind. as. globale (forte) de X_n et Y_n . Cependant on voit immédiatement que Y_n (resp. X_n) n'est pas as. strictement ind. de X_n (resp. Y_n) en probabilité.

4/ - La notion d'indépendance asymptotique stricte en probabilité n'est pas réciproque. Ce fait est en évidence dans l'exemple du § IV, où Y_n n'est pas strictement ind. de X_n en probabilité, tandis que X_n est strictement de Y_n en probabilité.

Il n'y a là aucun paradoxe ; cela résulte simplement de ce que la Topologie de la convergence faible ne permet pas d'apprécier certaines "modifications" d'une loi de probabilité ; elle n'est pas assez fine.

Montrons-le sur un exemple extrême. Partageons le segment $(0, 1)$ en $2n$ intervalles égaux $I_j (j = 1, 2, \dots, n)$. Soit Λ_n^1 la loi correspondant à une répartition uniforme sur l'ensemble des intervalles de rang impair I_{2k+1} , et Λ_n^2 la loi correspondant à une répartition uniforme sur l'ensemble des intervalles de rang pair I_{2k} . Considérons alors le couple (X_n, Y_n) défini comme suit :

$$\begin{cases} \Pr\{Y_n = 0\} = 1/2 ; & \text{loi de } X_n \text{ liée par } Y_n = 0 : \Lambda_n^1 \\ \Pr\{Y_n = 1\} = 1/2 ; & \text{loi de } X_n \text{ liée par } Y_n = 1 : \Lambda_n^2 \end{cases}$$

Y_n est lié fonctionnellement à X_n , puisque $Y_n = 0$ si $x_n \in I_{2k}$ et $Y_n = 1$ si $x_n \in I_{2k+1}$. D'autre part, les deux lois liées de X_n peuvent être rendues arbitrairement voisines en choisissant n assez grand : X_n est asymptotiquement strictement indépendant de Y_n en probabilité.

Remarque.

Pour analyser plus profondément les liaisons stochastiques, on pourrait songer à utiliser comme distance de deux mesures de probabilité μ_1, μ_2 d'un espace X (éléments d'une classe de mesures $\mathcal{M}$ définies sur un σ -corps $\mathcal{S}$) l'expression :

$$\delta(\mu_1, \mu_2) = \max_{E \in \mathcal{S}} [\mu_1(E) - \mu_2(E)]$$

où E est un sous-ensemble quelconque de $\mathcal{S}$. Cette distance prend sa valeur maximum $\delta = 1$ si les répartitions sont disjointes, c'est-à-dire s'il existe un $\mathcal{S} \in \mathcal{S}$ tel que :

$$\mu_1(\mathcal{E}) = 1 \quad ; \quad \mu_2(\mathcal{E}) = 0$$

Dans l'exemple cité plus haut, Λ_n^1 et Λ_n^2 ne sont plus arbitrairement voisines, mais au contraire :

$$\delta(\Lambda_n^1, \Lambda_n^2) = 1$$

4/ - THEOREME 59 -

Soit deux v.a. X_n, Y_n , telles que Y_n soit as. str. ind. de X_n en probabilité. Pour que la somme $Z_n = X_n + Y_n$ soit stable, il faut et il suffit que X_n et Y_n le soient.

Démonstration.

C'est une conséquence immédiate des théorèmes 58 & 57, mais il est intéressant d'établir ce théorème par une méthode directe ; nous verrons ainsi que l'indépendance stricte est plus facile à utiliser que l'indépendance globale.

La condition donnée est évidemment suffisante ; montrons qu'elle est nécessaire. Z_n étant supposé stable, si Y_n est stable il en va de même pour X_n . Supposons maintenant Y_n instable. Dans ce cas il existe une suite infinie $\mathcal{N}$ et deux constantes positives l et k telles que :

$$\Pr \{ |Y_n + a| > l \} > k$$

quel que soit a , pour $n \in \mathcal{N}$

Puisque la distance entre la loi marginale de Y_n et sa loi liée par $X_n = x_n$ peut être rendue arbitrairement petite pour un ensemble de valeurs de x_n dont la probabilité est arbitrairement voisine de 1, à condition de choisir n assez grand, nous aurons la relation :

$$\Pr \{ |Y_n + a| > \frac{l}{2} / X_n = x_n \} > \frac{k}{2}$$

quel que soit a , pour $n \in \mathcal{N}$ et $n > n_0$, et pour un ensemble E_n de valeurs de x_n de probabilité supérieure à $1/2$. On peut alors écrire :

$$\Pr \{ |X_n + Y_n + a| > \frac{l}{2} / X_n \in E_n \} > \frac{k}{2}$$

Or :

$$\Pr \{ |Z_n + a| > \frac{l}{2} \} \geq \Pr \{ X_n \in E_n \} \Pr \{ |Z_n + a| > \frac{l}{2} / X_n \in E_n \}$$

On en déduit :

$$\Pr \{ |Z_n + a| > \frac{l}{2} \} \geq \frac{k}{4}$$

quel que soit a , pour $n > n_0$ et $n \in \mathcal{N}$, ce qui implique l'instabilité de Z_n .
Il est donc impossible que Y_n soit instable. C. Q. F. D.

VI - INDEPENDANCE ASYMPTOTIQUE STRICTE PRESQUE COMPLETE -

1/ - Définition.

On dit que Y_n est asymptotiquement strictement indépendant de X_n presque complètement si la distance $\delta(x_n)$ entre la loi marginale de Y_n et la loi de Y_n liée par $X_n = x_n$ tend vers 0 presque complètement.

End'autres termes, si l'on appelle E_n l'ensemble des valeurs de x_n telles que $\delta(x_n) < \varepsilon$, on a :

$$\sum_{1}^{\infty} \Pr \{ X_n \notin E_n \} < \alpha$$

aussi petit que soit $\varepsilon > 0$.

Exemple.

Si nous reprenons l'exemple donné au n°IV, 3, nous voyons que :

$$|A_n(x; y) - A_n(x)| < 1/n \quad \text{quel que soit } y.$$

X_n est donc str. ind. de Y_n presque complètement.

2/ - Il est clair que l'indépendance stricte p.co. de Y_n vis-à-vis de X_n entraîne l'indépendance stricte en probabilité de Y_n vis-à-vis de X_n , et l'indépendance globale de ces deux variables.

3/ - THEOREME 60 -

Considérons deux v. a. X_n, Y_n telles que Y_n soit asymptotiquement strictement indépendant de X_n presque complètement. Pour que la somme $Z_n = X_n + Y_n$ soit stable p.co., il faut et il suffit que X_n et Y_n le soient.

Démonstration.

Nous savons déjà que la condition est suffisante. Pour établir qu'elle est nécessaire, remarquons d'abord que, si Z_n est stable p.co. elle est à fortiori stable en probabilité ; vu l'indépendance asymptotique de X_n et Y_n , cela implique la stabilité en probabilité de X_n et de Y_n .

En retranchant de X_n et de Y_n des constantes convenablement choisies, nous pouvons donc supposer que ces deux variables tendent vers 0 en probabilité, et par suite que Z_n tend vers 0 presque complètement.

Dans ces conditions, la stabilité p. co. de X_n entraînerait celle de Y_n . Il nous reste à examiner le cas où X_n n'est pas stable p. co.

Cette propriété de X_n équivaut à l'existence d'un nombre $1 > 0$ tel que, en posant :

$$\mathcal{G} = \mathcal{R} - [-1, +1]$$

et :

$$\alpha_n = \Pr \{ X_n \in \mathcal{G} \}, \quad \text{on ait :} \quad \sum_1^{\infty} \alpha_n = +\infty$$

Appelons $\mathcal{J}$ l'intervalle $[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$. Puisque $Y_n \xrightarrow{p} 0$, on a :

$$\Pr \{ Y_n \in \mathcal{J} \} \longrightarrow 1$$

Il existe alors un nombre $\varepsilon > 0$ tel que, si la distance δ d'une loi L à la loi marginale de Y_n est au plus égale à ε , on puisse écrire :

$$\Pr \{ Y \in \mathcal{J} \} > \frac{1}{2}, \quad Y \text{ étant une variable de loi } L.$$

Mais d'après l'indépendance stricte p. co. de Y_n par rapport à X_n , si E_n est l'ensemble des valeurs de x_n pour lesquelles :

$$\delta [B_n(y), B_n(y; x_n)] \leq \varepsilon$$

la série de terme général :

$$u_n = 1 - \Pr \{ X_n \in E_n \} \quad \text{est convergente.}$$

On a alors :

$$\Pr \{ Y_n \in \mathcal{J} / X_n = x_n \} > \frac{1}{2} \quad \text{pour } x_n \in E_n$$

et par suite :

$$\Pr \{ Y_n \in \mathcal{J} / X_n \in \mathcal{G} \cap E_n \} > \frac{1}{2}$$

Or :

$$\Pr \{ X_n \in \mathcal{G} \cap E_n \} > \alpha_n - u_n$$

D'où :

$$\Pr \{ X_n \in \mathcal{G}, Y_n \in \mathcal{J} \} > \Pr \{ X_n \in \mathcal{G} \cap E_n, Y_n \in \mathcal{J} \} > \frac{1}{2}(\alpha_n - u_n)$$

La série (α_n) étant divergente et la série (u_n) convergente, on a :

$$\sum_1^{\infty} \Pr \{ X_n \in \mathcal{G}, Y_n \in \mathcal{J} \} = +\infty$$

Il est clair que l'évènement :

$$X_n \subset \mathcal{E}, \quad Y_n \subset \mathcal{D}$$

entraîne $|Z_n| > \frac{1}{2}$.

Finalement, on a donc :

$$\sum_1^{\infty} \Pr \left\{ |Z_n| > \frac{1}{2} \right\} = +\infty,$$

c'est-à-dire que Z_n ne converge pas presque complètement vers 0. Dès lors il est impossible que X_n ne soit pas stable p.co. C.Q.F.D.

4/ - Remarque.

La condition d'indépendance as. stricte p.co. qui figure dans le théorème précédent étant très forte, on pourrait se demander s'il n'y a pas moyen de lui substituer une condition moins exigeante. Nous sommes en mesure de fournir une réponse positive à cette question. Cependant :

a) Il est impossible de beaucoup assouplir la condition visée. Par exemple, l'indépendance as. stricte en probabilité ne serait pas assez forte. Nous le constaterons facilement en prenant pour loi du couple (X_n, Y_n) la masse $(n-1)/n$ placée à l'origine et la masse $1/n$ au point $x = 1, y = -1$. On a : $X_n + Y_n = 0$, ce qui entraîne à fortiori : $X_n + Y_n \xrightarrow[p.co.]{} 0$. Y_n (resp. X_n) est as. str. ind. de X_n (resp. Y_n) en probabilité, et tend vers 0 en probabilité. Cependant, ni X_n ni Y_n ne tendent vers 0 p.co. puisque la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

b) Il semble difficile d'obtenir une condition intermédiaire entre l'ind. as. stricte p.co. et l'ind. as. stricte en probabilité qui soit simple et naturelle.

B - APPLICATION A LA THEORIE DES VALEURS EXTREMES -

VII - ETUDE DE LA LIAISON STOCHASTIQUE DE Y_n ET Z_n -

1/ - Etude qualitative.

Soit $F_n(y)$ la f.d.r. de Y_n , et $F_n(y; z)$ la f.d.r. de Y_n connaissant $Z_n = z$. Nous allons d'abord examiner la position de la courbe $\eta(y) = F_n(y; z)$ par rapport à la courbe $\eta(y) = F_n(y)$.

La f.d.r. $F_n(y; z)$ est définie par :

$$\begin{cases} F_n(y; z) = 0 & \text{si } y < z \\ F_n(y; z) = \left[\frac{F(y) - F(z)}{1 - F(z)} \right]^{n-1} & \text{si } y \geq z \end{cases}$$

Si les deux courbes envisagées sont discontinues, nous les compléterons par des segments verticaux de façon à obtenir des courbes continues. Il est clair que, au voisinage de la valeur $y = z$, on a : $F_n(y) > F_n(y; z)$. Pour que les deux courbes se traversent, il faut et il suffit qu'il existe des valeurs de y telles que : $F_n(y) < F_n(y; z)$. Posons alors :

$$F(y) = a \quad ; \quad F(z) = b \quad (0 \leq b \leq a \leq 1)$$

b étant fixé, il s'agit de voir s'il existe des valeurs de a pour lesquelles :

$$\left(\frac{a - b}{1 - b} \right)^{n-1} > a^n$$

Quand a est voisin de b , on a :

$$\left(\frac{a - b}{1 - b} \right)^{n-1} < a^n$$

Comme les deux fonctions a^n et $\left(\frac{a - b}{1 - b} \right)^{n-1}$ sont continues par rapport à a , l'équation :

$$a^n = \left(\frac{a - b}{1 - b} \right)^{n-1} \quad (1)$$

admet dans ce cas au moins une racine. Or, cette équation se résout aisément en b :

$$b = \frac{a - a^{\frac{n}{n-1}}}{1 - a^{\frac{n}{n-1}}}$$

valeur qui vérifie bien la condition $0 \leq b \leq a$

Etudions les variations de b en fonction de a .

Pour $a = 0$, $b = 0$, et $b/a \rightarrow 1$ quand $a \rightarrow 0$.

Quand $a \rightarrow 1$, $b \rightarrow 1/n$, et $\frac{db}{da} \rightarrow 1/2n$.

On voit aisément que $\frac{db}{da}$ est > 0 pour $a \in (0, 1)$, donc $b(a)$ est croissante dans cet intervalle. La discussion de l'équation (1) est immédiate



sur le graphique de $b(a)$:

- si $b \geq 1/n$: 0 solution

On a toujours $F_n(y; z) < F_n(y)$

- si $b < 1/n$: 1 solution

Les deux courbes se traversent une seule fois. Pour y assez grand, on a :

$$F_n(y; z) > F_n(y)$$

2/ - THEOREME 61 -

La distance $d_n(z)$ entre les deux lois $F_n(y)$ et $F_n(y; z)$ définie par :

$$d_n(z) = \text{Max}_{\{y\}} \{ |F_n(y) - F_n(y; z)| \}$$

vérifie l'inégalité :

$$d_n(z) < \text{Sup} \left\{ \frac{1}{n}, \frac{F(z)}{1 - F(z)} \right\}$$

Compte tenu du fait que $Z_n \xrightarrow[p.c.d.]{} -\infty$, on en déduit que $d_n(Z_n) \xrightarrow[p.c.d.]{} 0$, c'est-à-dire que Y_n est asymptotiquement strictement indépendant de Z_n presque complètement.

Démonstration.

Posons :

$$\Delta(y) = F_n(y) - F_n(y; z) = F^n(y) - \left[\frac{F(y) - F(z)}{1 - F(z)} \right]^{n-1}$$

L'ensemble des valeurs prises par $\Delta(y)$ quand y varie de $-\infty$ à $+\infty$ est contenu dans l'ensemble des valeurs que prend la fonction

$$D(a) = a^n - \left(\frac{a - b}{1 - b} \right)^{n-1} \quad \text{pour } b \leq a \leq 1$$

Donc :

$$\text{Max}_{\{y\}} \{ \Delta(y) \} \leq \text{Max}_{b \leq a \leq 1} \{ D(a) \}$$

et :

$$\text{Min}_{\{y\}} \{ \Delta(y) \} \geq \text{Min}_{b \leq a \leq 1} \{ D(a) \}$$

On peut écrire :

$$D(a) < a^n - \left(\frac{a - b}{1 - b} \right)^n < \frac{a^n}{1 - b} - \left(\frac{a - b}{1 - b} \right)^n = \bar{D}(a)$$

La fonction $\bar{D}(a)$ est monotone croissante sur le segment $(0, 1)$ car sa dérivée :

$$\bar{D}'(a) = \frac{n}{1-b} a^{n-1} - \left(\frac{a-b}{1-b} \right)^{n-1}$$

s'annule pour $a = 1$, et est positive quand $0 < a < 1$. Par suite :

$$\text{Max} \{ \bar{D}(a) \} = \bar{D}(1) = \frac{b}{1-b}$$

Finalement :

$$\text{Max}_{(y)} \{ \Delta(y) \} < \frac{b}{1-b} = \frac{F(z)}{1-F(z)} \quad (1)$$

D'autre part, en vertu de l'inégalité : $a > \frac{a-b}{1-b}$, on a :

$$D(a) > a^n - a^{n-1}$$

Mais l'on voit immédiatement que le minimum de $a^n - a^{n-1}$ sur le segment $(0, 1)$ est égal à $-\frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n})^{n-1}$ quantité qui est minorée par $\frac{1}{n}$.

Donc :

$$\text{Min}_{(y)} \{ \Delta(y) \} > -1/n \quad (2)$$

En rapprochant les inégalités (1) et (2), on obtient bien le résultat annoncé.

Remarque.

Bien entendu, Z_n possède la même propriété d'indépendance limite vis-à-vis de Y_n .

VIII - INDEPENDANCE LIMITE DE Y_n^α ET Z_n^β -

THEOREME 62 -

Soit Y_n^α et Z_n^β les valeurs d'un échantillon de rang α à partir de la droite et β à partir de la gauche, $F_{n,\alpha}(y)$ la f. d. r. marginale de Y_n^α et $F_{n,\alpha}(y; z)$ la f. d. r. de Y_n^α liée par $Z_n^\beta = z$. La distance :

$$d_n(z) = \text{Max}_{(y)} \{ | F_{n,\alpha}(y) - F_{n,\alpha}(y; z) | \}$$

vérifie l'inégalité :

$$d_n(z) < \left(\frac{n}{n - \alpha - \beta} \right)^\alpha + \frac{1}{[1 - F(z)]^\alpha} - 2$$

Par suite, $d_n(Z_n) \xrightarrow{\beta \cdot \text{co.}} 0$ avec $1/n$, et ainsi Y_n^α est asymptotiquement indépendant de Z_n^β presque complètement.

Démonstration.

La loi marginale de Y_n^α est :

$$F_{n,\alpha}(y) = \frac{n!}{(n-\alpha)! (\alpha-1)!} \int_0^{F(y)} t^{n-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} dt$$

Sil'on connaît $Z_n^\beta = z$, Y_n^α se présente comme la valeur de rang α (à partir de la droite) d'un échantillon de taille $n-\beta$, dont la loi est égale à $\frac{F(y) - F(z)}{1 - F(z)}$ pour $y \geq z$, et à 0 pour $y < z$. La f. d. r. de Y_n lié par $Z_n = z$ est donc :

$$F_{n,\alpha}(y; z) = \frac{(n-\beta)!}{(n-\alpha-\beta)! (\alpha-1)!} \int_0^{\frac{F(y)-F(z)}{1-F(z)}} u^{n-\alpha-\beta} (1-u)^{\alpha-1} du$$

Considérons la différence :

$$\Delta(y) = F_{n,\alpha}(y) - F_{n,\alpha}(y; z)$$

Il s'agit de majorer et de minorer $\Delta(y)$ quand y varie de z à $+\infty$. En fait, Δ est une fonction de $F(y)$ définie dans $[F(z), 1]$. En remplaçant $F(y)$ par un paramètre t qui varie continûment entre $F(z)$ et 1, nous ne pourrions qu'augmenter le maximum des valeurs de $\Delta(y)$ et diminuer leur minimum. Nous désignerons par $D(t)$ la fonction déduite de $\Delta(y)$ par le changement de variable $t = F(y)$. Il sera commode d'introduire la fonction :

$$\begin{aligned} H_n(t) &= \frac{n! (n-\alpha-\beta)!}{(n-\alpha)! (n-\beta)!} F_{n,\alpha}(y; z) \\ &= \frac{n!}{(n-\alpha)! (\alpha-1)!} \int_{F(z)}^t \left(\frac{t-F(z)}{1-F(z)} \right)^{n-\alpha-\beta} \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{[1-F(z)]^\alpha} dt \end{aligned}$$

On peut écrire :

$$D(t) = [F_{n,\alpha}(y) - H_n(t)] + [H_n(t) - F_{n,\alpha}(y; z)]$$

d'où :

$$\text{Max } \{ D(t) \} \leq \text{Max } [F_{n,\alpha}(y) - H_n(t)] + \text{Max } [H_n(t) - F_{n,\alpha}(y; z)]$$

On a d'abord :

$$H_n(t) - F_{n,\alpha}(y; z) = \left[\frac{n! (n-\alpha-\beta)!}{(n-\alpha)! (n-\beta)!} - 1 \right] F_{n,\alpha}(y; z)$$

Donc :

$$\text{Max } \{ H_n(t) - F_{n,\alpha}(y; z) \} = \frac{n(n-1) \dots (n-\alpha+1)}{(n-\beta)(n-\beta-1) \dots (n-\beta-\alpha+1)} - 1 < \left(\frac{n}{n-\alpha-\beta} \right)^2 - 1$$

Etudions maintenant $F_{n,\alpha}(y) - H_n(t)$. On a :

$$F_{n,\alpha}(y) < \frac{F_{n,\alpha}(y)}{[1 - F(z)]^\alpha}$$

et :

$$H_n(t) > \frac{n!}{(n-\alpha)! (\alpha-1)!} \int_{F(z)}^t \left[\frac{t - F(z)}{1 - F(z)} \right]^{n-\alpha} \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{[1 - F(z)]^\alpha} dt$$

Par conséquent :

$$F_{n,\alpha}(y) - H_n(t) < \frac{F_{n,\alpha}(y)}{[1 - F(z)]^\alpha} - \frac{n!}{(n-\alpha)! (\alpha-1)!} \int_{F(z)}^t \left(\frac{t - F(z)}{1 - F(z)} \right)^{n-\alpha} \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{[1 - F(z)]^\alpha} dt$$

Nous désignerons par $K_n(t)$ le second membre de cette inégalité.

$$K_n(t) = \frac{n!}{(n-\alpha)! (\alpha-1)!} - \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{[1 - F(z)]^\alpha} \left[t^{n-\alpha} - \left(\frac{t - F(z)}{1 - F(z)} \right)^{n-\alpha} \right]$$

Quant t est compris entre 0 et 1, on a constamment $t > \frac{t - F(z)}{1 - F(z)}$ ce qui entraîne $K_n'(t) > 0$.

Par suite $K_n(t)$ est croissante dans l'intervalle $(0, 1)$ et l'on a :

$$\begin{aligned} \text{Max} \{ K_n(t) \} &= K_n(1) \\ &= \frac{1}{[1 - F(z)]^\alpha} - \frac{n!}{(n-\alpha)! (\alpha-1)!} \int_{F(z)}^1 \left(\frac{t - F(z)}{1 - F(z)} \right)^{n-\alpha} \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{[1 - F(z)]^\alpha} dt \end{aligned}$$

Le changement de variable $u = \frac{t - F(z)}{1 - F(z)}$ donne :

$$\int_{F(z)}^1 \left(\frac{t - F(z)}{1 - F(z)} \right)^{n-\alpha} \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{[1 - F(z)]^\alpha} dt = \int_0^1 u^{n-\alpha} (1-u)^{\alpha-1} du = \frac{(n-\alpha)! (\alpha-1)!}{n!}$$

Il en résulte que :

$$\text{Max} \{ K_n(t) \} = \frac{1}{[1 - F(z)]^\alpha} - 1$$

Finalement :

$$\text{Max} \{ D(t) \} < \left(\frac{n}{n-\alpha-\beta} \right)^\alpha + \frac{1}{[1 - F(z)]^\alpha} - 2$$

Pour minorer $D(t)$, nous partirons de :

$$F_{n,\alpha}(y; z) < \frac{n!}{(n-\alpha)! (\alpha-1)!} \int_0^{\frac{t-F(z)}{1-F(z)}} u^{n-\alpha-\beta} (1-u)^{\alpha-1} du$$

Puisque $t > \frac{t-F(z)}{1-F(z)}$, on a aussi :

$$F_{n,\alpha}(y; z) < \frac{n!}{(n-\alpha)! (\alpha-1)!} \int_0^t u^{n-\alpha-\beta} (1-u)^{\alpha-1} du$$

On peut alors écrire :

$$D(t) > \frac{n!}{(n-\alpha)! (\alpha-1)!} \int_0^t t^{n-\alpha-\beta} (1-t)^{\alpha-1} (t^\beta - 1) dt$$

La fonction qui figure sous le signe d'intégration étant négative :

$$\begin{aligned} \text{Min } \{D(t)\} &> \frac{n!}{(n-\alpha)! (\alpha-1)!} \int_0^1 t^{n-\alpha-\beta} (1-t)^{\alpha-1} (t^\beta - 1) dt \\ &> \frac{n!}{(n-\alpha)! (\alpha-1)!} \left[\frac{(n-\alpha)! (\alpha-1)!}{n!} - \frac{(n-\alpha-\beta)! (\alpha-1)!}{(n-\beta)!} \right] \\ &= 1 - \frac{n(n-1)\dots(n-\alpha+1)}{(n-\beta)(n-\beta-1)\dots(n-\alpha-\beta+1)} \end{aligned}$$

et enfin :

$$\text{Min } \{D(t)\} > 1 - \left(\frac{n}{n-\alpha-\beta} \right)^\alpha$$

En résumé, nous avons :

$$1 - \left(\frac{n}{n-\alpha-\beta} \right)^\alpha < D(t) < \left[\left(\frac{n}{n-\alpha-\beta} \right)^\alpha - 1 \right] + \left[\frac{1}{[1-F(z)]^{\alpha-1}} - 1 \right]$$

et, à fortiori, la relation annoncée pour $d_n(z)$.

Remarque.

La double inégalité ci-dessus est encore valable si α et β varient avec n , mais ce n'est que pour des indices $\alpha(n)$ et $\beta(n)$ convenablement choisis que l'indépendance limite persisterait. Nous n'aborderons pas ce problème ici.

IX - STABILITE EN PROBABILITE DU MILIEU ET DE L'ETENDUE -
THEOREME 63 -

Le milieu M_n d'un échantillon (ou son étendue R_n) est stable en probabilité si et seulement si les deux valeurs extrêmes Y_n et Z_n sont stables en probabilité.

C'est là une conséquence immédiate des théorèmes 59 & 61.

Dans ce cas :

$$Y_n - F^{-1} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \xrightarrow[p]{} 0 ; \quad Z_n - F^{-1} \left(\frac{1}{n} \right) \xrightarrow[p]{} 0$$

donc :

$$M_n - \frac{1}{2} \left[F^{-1} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + F^{-1} \left(\frac{1}{n} \right) \right] \xrightarrow[p]{} 0$$

Corollaire 63.

Pour que M_n converge en probabilité vers une limite certaine 1, il faut et il suffit que Y_n et Z_n soient stables en probabilité, et que l'on ait :

$$\frac{1}{2} \left[F^{-1} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + F^{-1} \left(\frac{1}{n} \right) \right] \rightarrow 1 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

Notons d'ailleurs que l'on peut remplacer $1/n$ par une variable continue h qui tend vers 0.

THEOREME 64 -

La stabilité de l'un des milieux ou pseudo-milieux $M_n^{\alpha, \beta}$ entraîne celle de tous les autres, et de plus :

$$M_n^{\alpha, \beta} - M_n \xrightarrow[p]{} 0$$

Démonstration.

D'après les théorèmes 59 & 62, $M_n^{\alpha, \beta} = \frac{1}{2} (Y_n^\alpha + Z_n^\beta)$ est stable en probabilité si et seulement si Y_n^α et Z_n^β le sont. Or, nous savons (th. 26) que la stabilité de Y_n^α équivaut à celle de Y_n , et que la stabilité de Z_n^β équivaut à celle de Z_n .

Finalement, nous voyons que la stabilité de $M_n^{\alpha, \beta}$ équivaut à celle de M_n . En utilisant les relations :

$$Y_n^\alpha - Y_n \xrightarrow[p]{} 0 ; \quad Z_n^\beta - Z_n \xrightarrow[p]{} 0$$

on obtient :
$$M_n^{\alpha, \beta} - M_n \xrightarrow[p]{} 0$$

Corollaire 64.

Si l'un des milieux ou pseudo-milieux $M_n^{\alpha, \beta}$ converge en probabilité vers une limite certaine l , ils convergent tous vers cette limite.

X - STABILITE PRESQUE COMPLETE DU MILIEU ET DE L'ETENDUE -

En s'appuyant sur les théorèmes 60, 61 & 62, on obtient les résultats suivants :

THEOREME 65 -

Le milieu M_n (ou l'étendue R_n) d'un échantillon est stable presque complètement si et seulement si les deux valeurs extrêmes Y_n et Z_n sont stables presque complètement.

On a alors :

$$M_n - \frac{1}{2} [F^{-1}(1 - \frac{1}{n}) + F^{-1}(\frac{1}{n})] \xrightarrow[p.c.o.]{} 0$$

Corollaire 65.

Pour que M_n converge presque complètement vers une limite certaine l , il faut et il suffit que Y_n et Z_n soient stables presque complètement et que l'on ait :

$$1 - \frac{1}{2} [F^{-1}(1 - h) + F^{-1}(h)] \longrightarrow 0 \quad \text{avec } h.$$

THEOREME 66 -

La stabilité presque complète de l'un des milieux ou pseudo-milieux $M_n^{\alpha, \beta}$ entraîne celle de tous les autres, et de plus :

$$M_n^{\alpha, \beta} - M_n \xrightarrow[p.c.o.]{} 0$$

Corollaire 66.

Si l'un des milieux ou pseudo-milieux $M_n^{\alpha, \beta}$ converge presque complètement vers une limite certaine l , ils convergent tous vers cette limite.

CHAPITRE VI

ÉTUDE DE CERTAINES LOIS LIMITES

I - INTRODUCTION -

Les premiers statisticiens qui étudièrent les valeurs extrêmes d'un échantillon constatèrent qu'en réduisant convenablement la loi de Y_n , c'est-à-dire en substituant à Y_n la variable $a_n Y_n + b_n$ ($a_n > 0$), celle-ci admet souvent une loi limite :

$$L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n)$$

Dès lors, les deux problèmes suivants étaient posés :

1/ - Quelles sont les formes possibles de $L(x)$?

2/ - Quelles conditions doit vérifier $F(x)$ pour que $F^n(a_n x + b_n)$ converge vers une loi $L(x)$ d'un type déterminé ?

D'importants résultats ont été indiqués sur ce sujet par Fisher et Tippett, Gumbel et Von Mises, mais c'est Gnedenko qui a résolu (en 1943) les deux questions précédentes dans le cas général et de façon vraiment rigoureuse.

La méthode suivie par Gnedenko pour résoudre le premier problème s'étend d'elle-même à un problème un peu plus complexe, et doué, nous semble-t-il, de quelque intérêt pratique.

Considérons un système de k variables aléatoires $X^1, X^2, \dots, X^k$, ayant pour f. d. r. $F(x^1, x^2, \dots, x^k)$. Ce sont les coordonnées d'un point M de l'espace euclidien E^k .

En faisant n épreuves indépendantes, on obtient n points $M_1, M_2, \dots, M_n$. Appelons $X_1^1, X_1^2, \dots, X_1^k$ les coordonnées de M_1 , et posons :

$$Y_n^j = \text{Max} \{ X_1^j, X_2^j, \dots, X_n^j \} \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

La f. d. r. du point $(Y_n^1, Y_n^2, \dots, Y_n^k)$ est :

$$F_n(x^1, x^2, \dots, x^k) = F^n(x^1, x^2, \dots, x^k)$$

Quelles sont alors les lois limites possibles de l'ensemble $(Y_n^1, \dots, Y_n^k)$? Dans l'hypothèse $k = 1$, nous montrerons comment certains de nos résultats peuvent s'appliquer à la détermination des lois limites du milieu ou de l'étendue, mais nous n'insisterons pas sur ce point, qui a déjà fait l'objet de nombreux travaux.

A - CONVERGENCE DE DEUX LOIS DE PROBABILITE DU MEME TYPE -

I - CAS DE LOIS A UNE SEULE VARIABLE -

1/ - Définition.

On dit que deux f. d. r. $F(x)$ et $F^*(x)$ sont du même type s'il existe deux constantes $a > 0$ et b telles que :

$$F^*(x) = F(ax + b)$$

Cette terminologie est classique depuis Khintchine et P. Lévy. Il est clair que la propriété pour deux f. d. r. d'être du même type est une relation d'équivalence dans l'ensemble des f. d. r. En principe, nous considérerons des f. d. r. non dégénérées (c'est-à-dire telles que $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$) et non unitaires (c'est-à-dire telles que toute la probabilité soit concentrée en un point). Une loi ni dégénérée ni unitaire sera dite propre. On définirait de façon similaire deux f. d. r. de même type dans le cas de plusieurs variables.

2/ - THEOREME 67 -

Etant donné une suite de f. d. r. $F_n(x)$, supposons qu'il existe des constantes $a_n > 0$, $\alpha_n > 0$, b_n et β_n telles que

$$F_n(a_n x + b_n) \xrightarrow{L^0} \Phi(x)$$

$$F_n(\alpha_n x + \beta_n) \xrightarrow{L^0} \Psi(x)$$

les deux fonctions $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ correspondant à des lois propres. Dans ces conditions, $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ sont du même type.

Démonstration.

Soit E l'ensemble des points de continuité de $\Phi(x)$ et E' l'ensemble des points de continuité de $\Psi(x)$.

Puisque $\phi(x)$ est non dégénérée et non unitaire, il existe dans E deux nombres x_0 et x_1 vérifiant les inégalités :

$$0 < \phi(x_0) \leq \phi(x_1) < 1 \quad ; \quad x_0 < x_1$$

Considérons alors la suite ξ_n définie par :

$$a_n x_0 + b_n = \alpha_n \xi_n + \beta_n$$

On a :
$$F_n(a_n x_0 + b_n) = F_n(\alpha_n \xi_n + \beta_n)$$

La suite ξ_n est bornée. En effet :

a) si ξ_n n'était pas majorée, on pourrait trouver une suite infinie n_i telle que, aussi grand que soit $A \in E'$, on ait :

$$\xi_{n_i} > A ,$$

donc :
$$F_{n_i}(\alpha_{n_i} \xi_{n_i} + \beta_{n_i}) \geq F_{n_i}(\alpha_{n_i} A + \beta_{n_i})$$

et à la limite :
$$\phi(x_0) \geq \psi(A)$$

Cela entraînerait $\phi(x_0) = 1$ contrairement à l'hypothèse.

b) On verrait de même que si ξ_n n'était pas minorée, on aurait $\phi(x_0) = 0$, ce qui est impossible.

D'autre part, on peut écrire :

$$\xi_n = \frac{a_n}{\alpha_n} x_0 + \frac{b_n - \beta_n}{\alpha_n}$$

d'où :

$$-\infty < \frac{a_n}{\alpha_n} x_0 + \frac{b_n - \beta_n}{\alpha_n} < +\infty \quad (1)$$

Par analogie :

$$-\infty < \frac{a_n}{\alpha_n} x_1 + \frac{b_n - \beta_n}{\alpha_n} < +\infty \quad (2)$$

On déduit de (1) et (2) que :

$$-\infty < \frac{a_n}{\alpha_n} (x_1 - x_0) < +\infty$$

donc que $\frac{a_n}{\alpha_n}$ est borné. Il en résulte que $\frac{b_n - \beta_n}{\alpha_n}$ est aussi bornée. Finalement, nous voyons que l'on peut extraire de la suite des n une suite n_i pour laquelle :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{a_{n_j}}{\alpha_{n_j}} = \lambda \quad ; \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{b_{n_j} - \beta_{n_j}}{\alpha_{n_j}} = \mu$$

où λ et μ sont deux nombres finis. On a d'ailleurs $\lambda \neq 0$, car par raison de symétrie, le rapport $\frac{\alpha_n}{a_n}$ est borné.

Choisissons alors un nombre $x \in E$ et tel que :

$$\xi = \lambda x + \mu \in E'.$$

La suite ξ_{n_j} définie par :

$$a_{n_j}x + b_{n_j} = \alpha_{n_j} \xi_{n_j} + \beta_{n_j} \quad (3)$$

converge vers ξ . Aussi petit que soit $\epsilon > 0$, on peut toujours trouver deux nombres $h_1 > 0$ et $h_2 > 0$ vérifiant les conditions

$$h_1 < \epsilon \quad ; \quad h_2 < \epsilon \quad ; \quad \xi - h_1 \in E' \quad ; \quad \xi + h_2 \in E'$$

On aura alors, pour $j > J(\epsilon)$: $\xi - h_1 < \xi_{n_j} < \xi + h_2$ et :

$$F_{n_j} [\alpha_{n_j} (\xi - h_1) + \beta_{n_j}] \leq F_{n_j} (\alpha_{n_j} \xi_{n_j} + \beta_{n_j}) \leq F_{n_j} [\alpha_{n_j} (\xi + h_2) + \beta_{n_j}]$$

d'où, en passant à la limite et en tenant compte de (3) :

$$\psi (\xi - h_1) \leq \Phi (x) \leq \psi (\xi + h_2)$$

La fonction ψ étant continue pour la valeur de ξ envisagée, on a nécessairement :

$$\Phi (x) = \psi (\xi) = \psi (\lambda x + \mu)$$

Cette relation est établie pour tout x sauf peut-être pour un ensemble dénombrable de points. On en déduit qu'elle est vraie quel que soit x , en remarquant que $\Phi(x)$ et $\psi(x)$ sont monotones croissantes, et continues à gauche.

Ainsi, ces deux fonctions sont bien du même type.

Corollaire 67.

S'il existe des constantes $a_n > 0$, $\alpha_n > 0$, b_n et β_n telles que :

$$F_n (a_n x_n + b_n) \xrightarrow{I_n'} \Phi (x) \quad (4)$$

$$F_n (\alpha_n x_n + \beta_n) \xrightarrow{I_n'} \Phi (x) \quad (5)$$

où $\Phi(x)$ est une loi propre, on a nécessairement :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\alpha_n} = 1 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - \beta_n}{\alpha_n} = 0$$

Réciproquement, si ces deux conditions sont satisfaites, la relation (4) implique la relation (5).

Démonstration.

1/ - D'après ce que nous avons vu plus haut, si les relations (4) et (5) sont vraies, on a :

$$\frac{a_n}{\alpha_n} < +\infty, \quad \frac{\alpha_n}{a_n} < +\infty, \quad -\infty < \frac{b_n - \beta_n}{\alpha_n} < +\infty$$

Supposons que a_n/α_n ne tende pas vers 1. On pourrait alors trouver une suite n_i telle que :

$$\frac{a_{n_i}}{\alpha_{n_i}} \rightarrow \lambda, \quad \text{avec } \lambda \neq 1 \text{ et } \neq 0$$

et que :

$$\frac{b_{n_i} - \beta_{n_i}}{\alpha_{n_i}} \rightarrow \mu$$

En procédant comme ci-dessus, nous aboutirions à la relation :

$$\Phi(x) \equiv \Phi(\lambda x + \mu) \quad (6)$$

Soit x_0 le nombre défini par : $x_0 = \lambda x_0 + \mu$

Introduisons la nouvelle variable $z = x - x_0$, et posons :

$$\Phi(x) = \Phi(x_0 + z) = \hat{\Phi}(z)$$

Il vient :

$$\Phi(\lambda x + \mu) = \Phi[\lambda(x_0 + z) + \mu] = \hat{\Phi}[\lambda(x_0 + z) + \mu - x_0] = \hat{\Phi}(\lambda z)$$

La relation (6) s'écrit :

$$\hat{\Phi}(z) = \hat{\Phi}(\lambda z)$$

En itérant, on obtient :

$$\hat{\Phi}(z) = \hat{\Phi}(\lambda^n z)$$

où n est un entier positif quelconque. Pour tout $z > 0$, on a :

$$\hat{\Phi}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\Phi}(\lambda^n z) = \hat{\Phi}(+\infty) = 1$$

Pour tout $z < 0$:

$$\hat{\Phi}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\Phi}(\lambda^n z) = \hat{\Phi}(-\infty) = 0$$

La fonction $\Phi(x)$, supposée non dégénérée, serait donc unitaire, ce qui est contraire à l'hypothèse. Par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / \alpha_n) = 1$$

Supposons maintenant que $(b_n - \beta_n) / \alpha_n$ ne tende pas vers 0. Il existerait alors une suite n_i telle que :

$$(b_{n_i} - \beta_{n_i}) / \alpha_{n_i} \rightarrow \mu$$

avec $\mu \neq 0$. On aurait donc :

$$\Phi(x) = \Phi(x + \mu)$$

d'où l'on déduit : $\Phi(x) = \Phi(x + k\mu)$

k étant un entier quelconque. En faisant tendre k vers $+\infty$ ou $-\infty$, on obtient :

$$\Phi(x) = \Phi(+\infty) = \Phi(-\infty)$$

ce qui est impossible puisque $\Phi(x)$ n'est pas dégénérée. On a donc nécessairement :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - \beta_n) / \alpha_n = 0$$

2/ - Réciproque.

Partons des conditions :

$$F_n(a_n x + b_n) \xrightarrow{L} \Phi(x) \quad \text{loi propre}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / \alpha_n) = 1 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - \beta_n) / \alpha_n = 0$$

Prenons un nombre arbitraire x dans E , et associons-lui la suite ξ_n définie par :

$$a_n \xi_n + b_n = \alpha_n x + \beta_n$$

Quand $n \rightarrow \infty$, $\xi_n \rightarrow x$ et, puisque ce point est un point de continuité de $\Phi(x)$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(a_n \xi_n + b_n) = \Phi(x)$$

$$\text{d'où : } \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\alpha_n x + \beta_n) = \Phi(x) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

III - CAS DE LOIS A PLUSIEURS VARIABLES -

Les résultats analogues au théorème 67 et au corollaire 67 pour des f. d. r. de plusieurs variables s'établissent facilement si l'on s'appuie sur certaines propriétés de ces f. d. r.

Signalons tout d'abord qu'une f. d. r. de plusieurs variables sera dite propre si et seulement si toutes les f. d. r. marginales associées sont des lois propres ; unitaire, si l'une des marges est unitaire.

THEOREME 68 -

Si $\Phi(x^1, +\infty, \dots, +\infty)$ est continue pour $x^1 = x_{\infty}^1$ la fonction $\Phi(x^1, x^2, \dots, x^k)$ est continue dans tout le plan $x^1 = x_{\infty}^1$ sauf peut-être en son intersection avec un ensemble dénombrable de régions :

$$x^i = \text{constante} \quad (i = 2, 3, \dots \text{ ou } k)$$

Démonstration.

Choisissons deux points :

$$M_0(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^k) \text{ et } M_1(x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^k) :$$

le premier est dans le plan $x^1 = x_0^1$, le second est absolument quelconque. On peut écrire :

$$\begin{aligned} \Phi(M_1) - \Phi(M_0) &= [\Phi(x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^k) - \Phi(x_0^1, x_1^2, \dots, x_1^k)] \\ &+ [\Phi(x_0^1, x_1^2, \dots, x_1^k) - \Phi(x_0^1, x_0^2, x_1^3, \dots, x_1^k)] + \dots \\ &+ [\Phi(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^{k-1}, x_1^k) - \Phi(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^k)] \end{aligned} \quad (7)$$

Montrons alors que :

$$|\Phi(x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^k) - \Phi(x_0^1, x_1^2, \dots, x_1^k)| \leq |\Phi(x_1^1, +\infty, \dots, +\infty) - \Phi(x_0^1, +\infty, \dots, +\infty)| \quad (8)$$

Supposons par exemple $x_1^1 > x_0^1$. Après avoir supprimé les signes de valeur absolue, mettons l'inégalité ci-dessus sous la forme :

$$\Phi(x_0^1, +\infty, \dots, +\infty) - \Phi(x_0^1, x_1^2, \dots, x_1^k) \leq \Phi(x_1^1, +\infty, \dots, +\infty) - \Phi(x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^k)$$

Elle est maintenant évidente, car le premier membre est égal à :

$$\begin{aligned} \Pr \{ X^1 < x_0^1 \} &= \Pr \{ (X^1 < x_0^1) \cap [\bigcap_{i=2}^k (X^i < x_1^i)] \} \\ &= \Pr \{ (X^1 < x_0^1) \cap [\bigcup_{i=2}^k (X^i \geq x_1^i)] \} \end{aligned}$$

tandis que le second est :

$$\Pr \{ (X^1 < x_1^1) \cap [\bigcup_{i=2}^k (X^i \geq x_1^i)] \}$$

On traiterait de la même façon le cas $x_1^1 < x_0^1$, et l'inégalité (8) est ainsi établie. En l'appliquant à l'équation (7), on obtient :

$$|\Phi(M_1) - \Phi(M_0)| < \sum_{i=1}^k |\Phi(+\infty, \dots, x_{i-1}^i, \dots, +\infty) - \Phi(+\infty, \dots, x_0^i, \dots, +\infty)|$$

Dans ces conditions, si l'on pose :

$$s(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^k) = \Phi(x_0^1 + 0, x_0^2 + 0, \dots, x_0^k + 0) - \Phi(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^k)$$

on a :

$$s(x_0^1, \dots, x_0^k) \leq \sum_{i=2}^k [\Phi(+\infty, \dots, x_0^i + 0, \dots, +\infty) - \Phi(+\infty, \dots, x_0^i, \dots, +\infty)]$$

ce qui s'écrit, en appelant $s_{x^i}(x^i)$ le "saut" de la loi marginale de X^i au point x^i :

$$s(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^k) \leq s_{x^1}(x_0^1) + \dots + s_{x^k}(x_0^k)$$

Par suite :

$$\{s(x_0^1, \dots, x_0^k) > 0\} \implies \bigcup_{i=2}^k \{s_{x^i}(x_0^i) > 0\}$$

Or, $s_{x^i}(x^i)$ n'est positif que pour une infinité dénombrable de valeurs de x^i , d'où le théorème.

Lemme 69.

Si une suite de f. d. r. $F_n(x^1, x^2, \dots, x^k)$ converge légalement vers $\Phi(x^1, x^2, \dots, x^k)$, cette fonction vérifiant la condition $\Phi(+\infty, +\infty, \dots, +\infty) = 1$,

la convergence de $F_n(x^1, y, \dots, y)$ vers $F_n(x^1, +\infty, \dots, +\infty)$ quand $y \rightarrow +\infty$ est uniforme par rapport à n .

Démonstration.

Si le lemme était en défaut, il existerait un nombre $\varpi > 0$, une suite d'indices n_j et une suite de valeurs de y (y_{n_j}) tels que :

$$y_{n_j} \longrightarrow +\infty \quad \text{avec } j, \text{ et}$$

$$F_{n_j}(x^1, +\infty, \dots, +\infty) - F_{n_j}(x^1, y_{n_j}, \dots, y_{n_j}) > \varpi$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit, on peut trouver un point $(A^1, \dots, A^k)$ en lequel Φ est continue, et vérifie :

$$A^1 \geq x^1 \quad ; \quad \Phi(A^1, A^2, \dots, A^k) \geq 1 - \varepsilon$$

On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(A^1, A^2, \dots, A^k) = \Phi(A^1, A^2, \dots, A^k)$$

$$\text{donc :} \quad F_{n_j}(A^1, A^2, \dots, A^k) > 1 - 2\varepsilon \quad \text{quand } j > j_\varepsilon \quad (9)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} F_{n_j}(A^1, +\infty, \dots, +\infty) - F_{n_j}(A^1, y_{n_j}, \dots, y_{n_j}) &\geq F_{n_j}(x^1, +\infty, \dots, +\infty) \\ &- F_{n_j}(x^1, y_{n_j}, \dots, y_{n_j}) > \varpi \end{aligned}$$

Pour j assez grand :

$$y_{n_j} > \text{Max}(A^2, \dots, A^k),$$

$$\text{d'où :} \quad F_{n_j}(A^1, +\infty, \dots, +\infty) - F_{n_j}(A^1, A^2, \dots, A^k) > \varpi$$

et cette inégalité est manifestement incompatible avec l'inégalité (9) dès que $2\varepsilon < \varpi$.

Lemme 69'.

Etant donné une f. d. r. $\Phi(x^1, x^2, \dots, x^k)$ vérifiant la condition

$$\Phi(+\infty, \dots, +\infty) = 1,$$

si une suite de f. d. r. $F_n(x^1, x^2, \dots, x^k)$ converge légalement vers Φ , la suite des lois marginales $F_n(x^1, +\infty, \dots, +\infty)$ converge légalement vers $\Phi(x^1, +\infty, \dots, +\infty)$.

Démonstration.

Soit x_0^1 un point de continuité de $\Phi(x^1, +\infty, \dots, +\infty)$.

A tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il correspond en vertu du lemme 69 deux nombres y et n_ε tels que, pour $n > n_\varepsilon$, on ait :

$$F_n(x_0^1, +\infty, \dots, +\infty) - F_n(x_0^1, y, \dots, y) < \varepsilon$$

$$\text{et} \quad \Phi(x_0^1, +\infty, \dots, +\infty) - \Phi(x_0^1, y, \dots, y) < \varepsilon$$

L'ensemble des points de discontinuité de $\Phi(x^1, \dots, x^k)$ situés dans le plan $x^1 = x_0^1$ correspondant à un ensemble dénombrable de valeurs de $x^2, x^3, \dots, x^k$, on peut choisir y de façon que $\Phi(x^1, \dots, x^k)$ soit continue au point $(x_0^1, y, \dots, y)$.

En ce cas :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x_0^1, y, \dots, y) = \Phi(x_0^1, y, \dots, y)$$

Il existe donc un indice $N \geq n_\varepsilon$ tel que $n > N$ entraîne :

$$|F_n(x_0^1, y, \dots, y) - \Phi(x_0^1, y, \dots, y)| < \varepsilon$$

Finalement, on a quand $n > N$:

$$\begin{aligned} |F_n(x_0^1, +\infty, \dots, +\infty) - \Phi(x_0^1, +\infty, \dots, +\infty)| \\ \leq |F_n(x_0^1, +\infty, \dots, +\infty) - F_n(x_0^1, y, \dots, y)| \\ + |F_n(x_0^1, y, \dots, y) - \Phi(x_0^1, y, \dots, y)| \\ + |\Phi(x_0^1, y, \dots, y) - \Phi(x_0^1, +\infty, \dots, +\infty)| \leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

THEOREME 69 -

Etant donné une suite de f. d. r. $F_n(x^1, x^2, \dots, x^k)$, supposons qu'il existe des constantes $a_n^i > 0$, $\alpha_n^i > 0$, b_n^i et β_n^i ($i = 1, 2, \dots, k$) telles que :

$$F_n(a_n^1 x^1 + b_n^1, \dots, a_n^k x^k + b_n^k) \xrightarrow{L^2} \Phi(x^1, \dots, x^k)$$

$$F_n(\alpha_n^1 x^1 + \beta_n^1, \dots, \alpha_n^k x^k + \beta_n^k) \xrightarrow{L^2} \Psi(x^1, \dots, x^k)$$

les deux fonctions Φ et Ψ correspondant à des lois propres. Dans ces conditions, $\Phi(x^1, x^2, \dots, x^k)$ et $\Psi(x^1, x^2, \dots, x^k)$ sont du même type.

Démonstration.

D'après le lemme précédent :

$$F_n (a_n^1 x^1 + b_n^1, +\infty, \dots +\infty) \xrightarrow{I_n^1} \Phi (x^1, +\infty, \dots +\infty)$$

$$F_n (\alpha_n^1 x^1 + \beta_n^1, +\infty, \dots +\infty) \xrightarrow{I_n^1} \Psi (x^1, +\infty, \dots +\infty)$$

Donc les quantités α_n^1/a_n^1 , a_n^1/α_n^1 , et $(\beta_n^1 - b_n^1)/a_n^1$ sont bornées. D'une façon générale, les quantités α_n^i/a_n^i , a_n^i/α_n^i et $(\beta_n^i - b_n^i)/a_n^i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) sont bornées. Par conséquent, il existe une suite d'indices n_ν telle que :

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_{n_\nu}^i / \alpha_{n_\nu}^i = \lambda^i (\neq 0 \ \& \ \infty) ; \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} (b_{n_\nu}^i - \beta_{n_\nu}^i) / \alpha_{n_\nu}^i = \mu^i (\neq \infty)$$

A un point $x(x^1, x^2, \dots, x^k)$ faisons correspondre le point $\xi_\nu(\xi_\nu^1, \dots, \xi_\nu^k)$ par les formules :

$$a_{n_\nu}^i x^i + b_{n_\nu}^i = \alpha_{n_\nu}^i \xi_\nu^i + \beta_{n_\nu}^i \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

On a :

$$\xi_\nu^i = \frac{a_{n_\nu}^i}{\alpha_{n_\nu}^i} x^i + \frac{b_{n_\nu}^i - \beta_{n_\nu}^i}{\alpha_{n_\nu}^i}$$

et l'on voit que la suite de points ξ_ν a une limite ξ quand $\nu \rightarrow \infty$, de coordonnées :

$$\xi^i = \lambda^i x^i + \mu^i$$

Supposons qu'aux points x et ξ considérés, les fonctions $\Phi(x)$ et $\Psi(\xi)$ soient continues. Alors :

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \infty} F_{n_\nu} (\alpha_{n_\nu}^1 \xi_\nu^1 + \beta_{n_\nu}^1, \dots, \alpha_{n_\nu}^k \xi_\nu^k + \beta_{n_\nu}^k) \\ = \lim_{\nu \rightarrow \infty} F_{n_\nu} (a_{n_\nu}^1 x^1 + b_{n_\nu}^1, \dots, a_{n_\nu}^k x^k + b_{n_\nu}^k) = \Phi(x) \end{aligned}$$

On peut toujours trouver k nombres positifs h^i tels que $h^i < \epsilon$ et que la fonction Ψ soit continue aux points $(\xi^i - h^i)$ et $(\xi^i + h^i)$.

Pour $\nu > \nu(\epsilon)$, on a :

$$\xi^i - h^i \leq \xi_\nu^i \leq \xi^i + h^i$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad F_{n_\nu} [\alpha_{n_\nu}^1 (\xi^1 - h^1) + \beta_{n_\nu}^1, \dots, \alpha_{n_\nu}^k (\xi^k - h^k) + \beta_{n_\nu}^k] \\ \leq F_{n_\nu} [\alpha_{n_\nu}^1 \xi_\nu^1 + \beta_{n_\nu}^1, \dots, \alpha_{n_\nu}^k \xi_\nu^k + \beta_{n_\nu}^k] \\ \leq F_{n_\nu} [\alpha_{n_\nu}^1 (\xi^1 + h^1) + \beta_{n_\nu}^1, \dots, \alpha_{n_\nu}^k (\xi^k + h^k) + \beta_{n_\nu}^k] \end{aligned}$$

On en déduit, en passant à la limite :

$$\psi(\xi^1 - h^1, \dots, \xi^k - h^k) \leq \Phi(x^1, \dots, x^k) \leq \psi(\xi^1 + h^1, \dots, \xi^k + h^k)$$

et, puisque ψ est continue au point $(\xi^1, \dots, \xi^k)$:

$$\psi(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^k) = \Phi(x^1, x^2, \dots, x^k)$$

En vertu du fait que Φ et ψ sont monotones et que l'ensemble de leurs points de discontinuité est de mesure nulle, l'égalité précédente est partout vérifiée, donc ψ et Φ sont bien du même type :

$$\psi(\lambda^1 x^1 + \mu^1, \dots, \lambda^k x^k + \mu^k) = \Phi(x^1, \dots, x^k)$$

Corollaire 69.

S'il existe des constantes $a_n^i > 0$, $\alpha_n^i > 0$, b_n^i et β_n^i ($i = 1, 2, \dots, k$) telles que :

$$F_n(a_n^1 x^1 + b_n^1, \dots, a_n^k x^k + b_n^k) \xrightarrow{L^n} \Phi(x^1, x^2, \dots, x^k) \quad (10)$$

$$F_n(\alpha_n^1 x^1 + \beta_n^1, \dots, \alpha_n^k x^k + \beta_n^k) \xrightarrow{L^n} \Phi(x^1, x^2, \dots, x^k) \quad (11)$$

où Φ est une loi propre, on a nécessairement :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^i / \alpha_n^i = 1 ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n^i - \beta_n^i) / \alpha_n^i = 0 \quad (12)$$

($i = 1, 2, \dots, k$)

Réciproquement, si la condition (10) est satisfaite, les conditions (12) entraînent la condition (11).

Démonstration.

Si (10) et (11) sont vraies, on a, d'après le lemme 69' :

$$F_n(a_n^1 x^1 + b_n^1, +\infty, \dots, +\infty) \xrightarrow{L^n} \Phi(x^1, +\infty, \dots, +\infty)$$

$$F_n(\alpha_n^1 x^1 + \beta_n^1, +\infty, \dots, +\infty) \xrightarrow{L^n} \Phi(x^1, +\infty, \dots, +\infty)$$

d'où l'on déduit, d'après le corollaire 69, que $a_n^1 / \alpha_n^1 \rightarrow 1$ et $(b_n^1 - \beta_n^1) / \alpha_n^1 \rightarrow 0$.

Même démonstration pour les autres valeurs de i .

Pour établir la réciproque, choisissons un point de continuité de Φ , soit $(x^1, x^2, \dots, x^k)$, et associons-lui la suite de points ξ_n définie par :

$$a_n^i \xi_n^i + b_n^i = \alpha_n^i x^i + \beta_n^i \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

On a : $F_n(\alpha_n^1 x^1 + \beta_n^1, \dots, \alpha_n^k x^k + \beta_n^k) = F_n(a_n^1 \xi_n^1 + b_n^1, \dots, a_n^k \xi_n^k + b_n^k)$

Quand $n \rightarrow \infty$, $\xi_n \rightarrow x$, et puisque Φ est continue en ce point le second membre de l'égalité précédente tend vers $\Phi(x)$. On a donc bien, en tout point où Φ est continue :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\alpha_n^1 x^1 + \beta_n^1, \dots, \alpha_n^k x^k + \beta_n^k) = \Phi(x^1, \dots, x^k)$$

B - DETERMINATION D'UNE CLASSE DE LOIS LIMITES -

Soit $Y_n^1, Y_n^2, \dots, Y_n^k$ les plus grandes valeurs d'un échantillon de n points à k dimensions. Nous allons rechercher les lois limites possibles pour un tel système de v. a., c'est-à-dire les formes possibles des limites de la fonction :

$$F^n(a_n^1 x^1 + b_n^1, \dots, a_n^k x^k + b_n^k)$$

Nous désignerons par L^k l'ensemble de ces lois limites, dont les marges seront toujours supposées ni dégénérées, ni unitaires. L^1 contient seulement trois types de lois, mais pour $k > 1$, on a des ensembles qui dépendent de fonctions arbitraires.

IV - L'IDENTITE FONDAMENTALE -

THEOREME 70 -

Pour qu'une f. d. r. propre $\Phi(x^1, x^2, \dots, x^k)$ appartienne à L^k , il faut et il suffit qu'à toute valeur de l'entier $p > 0$ corresponde un système de constantes $\alpha_p^i > 0$, β_p^i donnant lieu à l'identité :

$$\Phi^p(\alpha_p^1 x^1 + \beta_p^1, \dots, \alpha_p^k x^k + \beta_p^k) = \Phi(x^1, x^2, \dots, x^k)$$

Démonstration.

a) Si $\Phi \in L^k$, il existe une f. d. r. $F(x^1, x^2, \dots, x^k)$ telle que :

$$\Phi(x^1, x^2, \dots, x^k) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n^1 x^1 + b_n^1, \dots, a_n^k x^k + b_n^k)$$

Soit p et m deux entiers positifs, le premier fixe, le second variable. On peut écrire :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [F^m(a_{mp}^1 x^1 + b_{mp}^1, \dots, a_{mp}^k x^k + b_{mp}^k)]^p = \Phi(x^1, x^2, \dots, x^k)$$

Il en résulte que $F^m(a_{mp}^1 x^1 + b_{mp}^1, \dots, a_{mp}^k x^k + b_{mp}^k)$ a une limite quand $m \rightarrow \infty$ et, d'après le théorème 69, cette limite est nécessairement du même type que Φ . Il existe donc des constantes α_p^i, β_p^i pour lesquelles :

$$\Phi^p(\alpha_p^1 x^1 + \beta_p^1, \dots, \alpha_p^k x^k + \beta_p^k) = \Phi(x^1, x^2, \dots, x^k)$$

b) Réciproquement, si l'identité précédente peut être réalisée pour chaque valeur de p , $\Phi \in L^k$. Il suffit pour le voir de choisir :

$$F(x^1, x^2, \dots, x^k) = \Phi(x^1, x^2, \dots, x^k)$$

V - DETERMINATION DE L^1 -

1/ - Rappelons qu'il s'agit de l'ensemble des f. d. r. propres $\Phi(x)$ telles que, à toute valeur de k (entier positif) il corresponde deux nombres α_k et β_k pour lesquels :

$$\Phi^k(\alpha_k x + \beta_k) = \Phi(x) \quad (13)$$

THEOREME 71 -

Etant donné une f. d. r. $\Phi(x)$ vérifiant l'identité (13) pour une valeur déterminée de $k \geq 2$, il se produit nécessairement l'une des trois circonstances suivantes :

a) $\alpha_k > 1$.

On a alors : $\Phi(x) = 0$ pour $x \leq \beta_k / (1 - \alpha_k)$

et : $0 < \Phi(x) < 1$ pour $x > \beta_k / (1 - \alpha_k)$

b) $\alpha_k < 1$.

On a : $0 < \Phi(x) < 1$ pour $x < \beta_k / (1 - \alpha_k)$

et : $\Phi(x) = 1$ pour $x \geq \beta_k / (1 - \alpha_k)$

c) $\alpha_k = 1$.

On a : $0 < \Phi(x) < 1$ pour tout x .

Démonstration.

a) Si $\alpha_k \neq 1$, l'équation : $x = \alpha_k x + \beta_k$

admet une solution : $x_0 = \beta_k / (1 - \alpha_k)$

L'identité (13) peut s'écrire :

$$\Phi^k(x_0 + \alpha_k h) = \Phi(x_0 + h) \quad (14)$$

Pour $h = 0$, cela donne : $\Phi^k(x_0) = \Phi(x_0)$

d'où : $\Phi(x_0) = 0$ ou : $\Phi(x_0) = 1$

Supposons d'abord $\alpha_k > 1$. Si h est négatif, on a :

$$x_0 + \alpha_k h < x_0 + h$$

donc : $\Phi(x_0 + \alpha_k h) \leq \Phi(x_0 + h)$

Mais, en vertu de (14) :

$$\Phi(x_0 + \alpha_k h) \geq \Phi(x_0 + h)$$

On a donc :

$$\Phi(x_0 + \alpha_k h) = \Phi(x_0 + h)$$

et par suite :

$$\Phi^k(x_0 + h) = \Phi(x_0 + h) \quad \text{pour tout } h < 0$$

La loi $\Phi(x)$ n'étant pas dégénérée, cela entraîne :

$$\Phi(x_0 + h) = 0 \quad \text{pour } h < 0$$

On aura aussi : $\Phi(x_0) = 0$, puisque $\Phi(x)$ est continue à gauche.

Prenons maintenant une valeur positive quelconque de h , et montrons que :

$$0 < \Phi(x_0 + h) < 1$$

En effet, si l'on avait :

$$\Phi(x_0 + h) = 0,$$

on aurait également, d'après (14) :

$$\Phi(x_0 + \alpha_k h) = 0$$

et, en itérant :

$$\Phi(x_0 + \alpha_k^n h) = 0 \quad (n \text{ entier} > 0)$$

Quand $n \rightarrow \infty$, $h\alpha_k^n \rightarrow +\infty$, d'où : $\Phi(+\infty) = 0$

ce qui est impossible.

Si l'on avait :

$$\Phi(x_0 + h) = 1,$$

on aurait aussi, d'après (14)

$$\Phi(x_0 + h/\alpha_k) = 1$$

et, en itérant :

$$\Phi(x_0 + h/\alpha_k^n) = 1.$$

Quand $n \rightarrow \infty$, $h/\alpha_k^n \rightarrow 0$, d'où : $\Phi(x_0 + 0) = 1$.

Cela est impossible, car $\Phi(x)$ n'est pas unitaire. La 1^{ère} partie du théorème est donc établie.

b) Supposons $\alpha_k < 1$, et considérons le nombre x_0 défini plus haut. Si h est positif :

$$x_0 + \alpha_k h < x_0 + h$$

donc :

$$\Phi(x_0 + \alpha_k h) \leq \Phi(x_0 + h)$$

Or, d'après (14) :

$$\Phi(x_0 + \alpha_k h) \geq \Phi(x_0 + h)$$

On a donc :

$$\Phi(x_0 + \alpha_k h) = \Phi(x_0 + h)$$

et par suite :

$$\Phi^k(x_0 + h) = \Phi(x_0 + h) \quad \text{pour tout } h > 0.$$

La loi de $\Phi(x)$ n'étant pas dégénérée, cela entraîne :

$$\Phi(x_0 + h) = 1 \quad \text{pour } h > 0$$

$\Phi(x)$ n'étant pas unitaire, on aura aussi : $\Phi(x_0) = 1$.

Donnons à h une valeur négative quelconque, et montrons que :

$$0 < \Phi(x_0 + h) < 1$$

Si l'on avait :

$$\Phi(x_0 + h) = 0,$$

on aurait aussi, d'après (14) :

$$\Phi(x_0 + \alpha_k h) = 0,$$

et en itérant :

$$\Phi(x_0 + \alpha_k^n h) = 0$$

Quand $n \rightarrow \infty$, $\alpha_k^n h \rightarrow 0$, d'où : $\Phi(x_0) = 0$

ce qui est impossible.

Si l'on avait :

$$\Phi(x_0 + h) = 1,$$

on aurait aussi, d'après (14) :

$$\Phi(x_0 + h/\alpha_k) = 1,$$

et, par itération :

$$\Phi(x_0 + h/\alpha_k^n) = 1$$

Quand $n \rightarrow \infty$, $h/\alpha_k^n \rightarrow -\infty$, d'où : $\Phi(-\infty) = 1$

ce qui est impossible.

c) Si $\alpha_k = 1$, la relation (13) s'écrit :

$$\Phi^k(x + \beta_k) = \Phi(x) \quad (15)$$

On a évidemment $\beta_k \neq 0$, sans quoi $\Phi(x)$ serait dégénérée ou unitaire. Montrons que l'on ne peut avoir $\Phi(x) = 1$ pour une valeur finie de la variable. En effet, on aurait alors, d'après (15) $\Phi(x \pm \beta_k) = 1$ et, en itérant : $\Phi(x \pm n\beta_k) = 1$.

Il en résulterait, en faisant croître indéfiniment n :

$$\Phi(-\infty) = \Phi(+\infty) = 1,$$

ce qui est impossible.

On verrait de la même façon que $\Phi(x) \neq 0$ pour tout x .

Corollaire 71.

Soit une f. d. r. $\Phi(x) \in L^1$, c'est-à-dire vérifiant l'identité (13) pour toute valeur de k . Dans ces conditions, les coefficients α_k associés sont tous supérieurs à 1, ou tous inférieurs à 1, ou tous égaux à 1.

Dans les deux premiers cas, le nombre $x_0 = \beta_k / (1 - \alpha_k)$ est indépendant de k .

Démonstration.

Appelons respectivement K_1, K_2, K_3 les sous-ensembles de L^1 formés par les f. d. r. $\phi(x)$ telles que :

a) il existe un nombre x_0 vérifiant les conditions :

$$\phi(x) = 0 \text{ pour } x \leq x_0 ; \quad 0 < \phi(x) < 1 \text{ pour } x > x_0$$

b) il existe un nombre x_0 vérifiant les conditions :

$$0 < \phi(x) < 1 \text{ pour } x < x_0 ; \quad \phi(x) = 1 \text{ pour } x \geq x_0$$

c) On a : $0 < \phi(x) < 1$ quel que soit x .

Ces trois sous-ensembles sont disjoints, et il résulte du théorème 71 que :

$$K_1 \cup K_2 \cup K_3 = L^1 ,$$

d'où l'on déduit la 1ère partie du corollaire.

Quant au nombre $x_0 = \beta_k / (1 - \alpha_k)$, il est clair qu'il ne dépend que de $\phi(x)$, et non de k .

2/ - Etude de la famille K_1 .

THEOREME 72 -

Pour qu'une f. d. r. appartienne à K_1 , il faut et il suffit qu'elle soit du même type que l'une des fonctions $\phi_\mu(x)$ ($\mu > 0$), définies par :

$$\phi_\mu(x) = 0 \text{ pour } x \leq 0$$

$$\phi_\mu(x) = \exp(-x^{-\mu}) \text{ pour } x > 0$$

Démonstration.

On vérifie immédiatement que toute fonction de même type qu'une fonction $\phi_\mu(x)$ appartient à K_1 . Etablissons la réciproque. Soit $\phi(x)$ une fonction de K_1 . D'après le théorème et le corollaire 71, il existe une constante x_0 telle que :

$$\phi(x_0 + h) = 0 \text{ pour } h \leq 0 ; \quad 0 < \phi(x_0 + h) < 1 \text{ pour } h > 0$$

Il s'agit de déterminer $\phi(x_0 + h)$ pour $h > 0$. Pour cela, posons :

$$f(h) = -L \log \phi(x_0 + h)$$

La fonction $f(h)$ est positive et monotone non croissante.

A tout entier $k > 0$, il correspond un nombre $\alpha_k > 1$ tel que :

$$k f(\alpha_k h) = f(h)$$

ou :

$$k f(u) = f\left(\frac{u}{\alpha_k}\right) \quad (u > 0)$$

En particulier, on a :

$$\begin{cases} 2 f(u) = f(Au) & A < 1 \\ 3 f(u) = f(Bu) & B < 1 \end{cases}$$

En itérant, on obtient :

$$\begin{cases} f(A^n u) = 2^n f(u) \\ f(B^n u) = 3^n f(u) \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (16)$$

Puisque $f(u) \neq 0$ pour tout $u > 0$, il est impossible de trouver deux indices m et n tels que : $A^n = B^m$. Donc le rapport $\text{Log } A / \text{Log } B$ est irrationnel.

Soit λ un nombre positif quelconque, et ε un nombre positif arbitrairement petit. L'ensemble des nombres de la forme :

$$n \frac{\text{Log } A}{\text{Log } B} - m$$

étant partout dense, on peut toujours choisir m et n de façon que :

$$\left| n \frac{\text{Log } A}{\text{Log } B} - m - \frac{\text{Log } \lambda}{\text{Log } B} \right| < \frac{\varepsilon}{|\text{Log } B|}$$

On a alors :

$$\frac{A^n}{B^m} = \lambda e^{\theta \varepsilon} \quad (-1 < \theta < 1)$$

On peut écrire, d'après les équations (16) :

$$f(\lambda e^{\theta \varepsilon} u) = 2^n f\left(\frac{u}{B^m}\right)$$

$$f(u) = 3^m f\left(\frac{u}{B^m}\right)$$

d'où l'on déduit :

$$F(\lambda e^{\theta \varepsilon} u) = \frac{\lambda^\varepsilon}{3^m} f(u) \quad (17)$$

Supposons alors que $\varepsilon \longrightarrow 0$ tandis que $m \longrightarrow +\infty$ et $n \longrightarrow +\infty$. On a :

$$\text{Log } \lambda = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (n \text{ Log } A - m \text{ Log } B) < \infty$$

D'après (17) on a aussi :

$$n \text{ Log } 2 - m \text{ Log } 3 < \infty$$

Il en résulte :

$$\frac{\text{Log } A}{\text{Log } B} = \frac{\text{Log } 2}{\text{Log } 3} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{m}{n}$$

Posons :

$$\frac{\text{Log } 2}{\text{Log } A} = \frac{\text{Log } 3}{\text{Log } B} = -\mu \quad (\mu > 0)$$

On peut donc écrire :

$$\lim. \frac{2^n}{3^m} = \lambda^{-\mu}$$

Le second membre de (17) ayant une limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, le premier membre a également une limite, qui est $f(\lambda u)$, et l'on a :

$$f(\lambda u) = \lambda^{-\mu} f(u) \quad (18)$$

En faisant $u = 1$, il vient finalement :

$$f(\lambda) = \lambda^{-\mu} f(1)$$

ce qui prouve que $f(h)$ est de la forme :

$$f(h) = C. h^{-\mu} \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque.

La limite du second membre de (17) étant continue en λ , il est légitime d'écrire :

$$\lim. f(\lambda e^{\theta \varepsilon} u) = f(\lambda u)$$

3/ - Etude de la famille K_2 .

THEOREME 73 -

Pour qu'une f. d. r. appartienne à K_2 , il faut et il suffit qu'elle soit du même type que l'une des fonctions $\psi_\nu(x)$ ($\nu > 0$), définies par :

$$\psi_\nu(x) = \exp(-x)^\nu \quad \text{pour } x \leq 0$$

$$\psi_\nu(x) = 1 \quad \text{pour } x > 0$$

Démonstration.

Condition suffisante : évident.

Condition nécessaire : on procède comme au théorème 72, en remarquant simplement que, cette fois, $f(h)$ est définie pour $h < 0$. On arrive ainsi à la relation :

$$f(\lambda u) = \lambda^\nu f(u) \quad (\nu > 0)$$

qui donne, en faisant $u = -1$:

$$f(-\lambda) = \lambda^\nu f(-1)$$

$$\text{d'où :} \quad f(h) = C.(-h)^\nu \quad \text{C. Q. F. D.}$$

4/ - Etude de la famille K_3 .

THEOREME 74 -

Pour qu'une f. d. r. appartienne à K_3 , il faut et il suffit qu'elle soit du même type que la fonction :

$$\Lambda(x) = \exp(-e^{-x})$$

Démonstration.

Condition suffisante : évident.

Condition nécessaire : nous avons vu que toute f. d. r. de K_3 est caractérisée par l'identité :

$$\phi^k(x + \beta_k) = \phi(x) \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (19)$$

Le changement de variable $x = \text{Log } u$ ($u > 0$) transforme $\phi(x)$ en :

$$F(u) = \phi(\text{Log } u).$$

Si l'on pose :

$$\beta_k = \text{Log } \alpha_k$$

l'identité (19) devient : $F^k(\alpha_k u) = F(u)$

Dans ces conditions, $F(u) \in K_1$, donc elle est de la forme :

$$F(u) = \exp(-u^\mu) \quad (\mu > 0)$$

Finalement, on a bien :

$$\Phi(x) = \exp(-e^{-\mu x})$$

Remarque.

Les f. d. r. du type $\Phi_\mu(x)$ et $\Psi_\nu(x)$ sont généralement appelées "lois de Fréchet". La loi $\Lambda(x)$ est dite : "loi de Gumbel".

VI - DETERMINATION DE L^k -

1/ - Afin d'alléger les notations, nous prendrons $k = 3$; les résultats de notre étude s'étendent d'eux-mêmes au cas général.

Posons : $\tilde{L} = L$. La famille L est donc l'ensemble des f. d. r. $\Phi(x, y, z)$ dont les marges ne sont ni dégénérées, ni unitaires, et qui vérifient pour toute valeur de l'entier $p > 0$ la relation :

$$\Phi^p(\alpha^1 x + \beta^1, \alpha^2 y + \beta^2, \alpha^3 z + \beta^3) = \Phi(x, y, z) \quad (20)$$

$$(\alpha^1 > 0, \alpha^2 > 0, \alpha^3 > 0)$$

2/ - Etude des marges.

Les lois marginales d'une fonction $\Phi \in L$ sont, par hypothèse, des lois propres ; désignons-les respectivement par $A(x)$, $B(y)$, et $C(z)$. Elles vérifient les identités :

$$A^p(\alpha^1 x + \beta^1) = A(x) \quad ; \quad B^p(\alpha^2 y + \beta^2) = B(y)$$

$$C^p(\alpha^3 z + \beta^3) = C(z)$$

Donc, elles appartiennent à L^1 (ceci est d'ailleurs évident a priori). Nous allons supposer dorénavant que $A(x)$ est du même type que Φ_μ , $B(y)$ du même type que Ψ_ν , et $C(z)$ du même type que $\exp(-e^{-z})$. Moyennant une transformation linéaire sur chacune des variables X , Y et Z (qui conserve leur type), nous pouvons alors nous ramener au cas où :

$$\Lambda(x) = \exp(-x^{-X}) \quad ; \quad B(y) = \exp[-(-y)^Y] \quad ; \quad C(z) = \exp(-e^{-z})$$

avec : $X > 0$ et $Y > 0$.

La fonction Φ est changée en une fonction $\psi(x, y, z)$ qui vérifie :

$$\psi^p(\alpha^1 x, \alpha^2 y, z + \beta_3) = \psi(x, y, z) \quad (21)$$

Nous appellerons L' la sous-famille de L formée par les f. d. r. propres qui satisfont cette identité pour toute valeur de p .

3/ - Considérons les trois v. a. positives U, V, W , déduites de X, Y et Z par les relations :

$$U = X^\mu ; \quad V = (-Y)^{-\nu} ; \quad W = \exp(Z)$$

Leurs f. d. r. marginales sont :

$$A_o(u) = \Pr \{ U < u \} = \Pr \{ X < u^{\frac{1}{\mu}} \} = \exp(-\frac{1}{u})$$

$$B_o(v) = \Pr \{ V < v \} = \Pr \{ Y < -v^{\frac{1}{\nu}} \} = \exp(-\frac{1}{v})$$

$$C_o(w) = \Pr \{ W < w \} = \Pr \{ Z < \text{Log } w \} = \exp(-\frac{1}{w})$$

Quant à leur loi jointe $\otimes(u, v, w)$ elle est définie par :

$$\otimes(u, v, w) = \psi(u^{\frac{1}{\mu}}, -v^{-\frac{1}{\nu}}, \text{Log } w)$$

Il est facile de voir que $\otimes \subset L$. En effet, l'identité (21) peut s'écrire :

$$\psi^p(au^{\frac{1}{\mu}}, -bv^{-\frac{1}{\nu}}, \text{Log } w + c) = \psi(u^{\frac{1}{\mu}}, -v^{-\frac{1}{\nu}}, \text{Log } w)$$

ou :

$$\otimes^p(a^\mu u, b^{-\nu} v, e^c w) = \otimes(u, v, w)$$

relation qui est de la forme :

$$\otimes^p(a'u, b'v, c'w) = \otimes(u, v, w)$$

En considérant les lois marginales de $\otimes$, on obtient immédiatement : $a' = b' = c' = p$. Finalement, $\otimes$ vérifie la relation :

$$\otimes^p(pu, pv, pw) = \otimes(u, v, w) \quad (22)$$

4/ - Soit L'' l'ensemble des f. d. r. propres $\otimes$ vérifiant (22). Il est évident que $L'' \subset L$, et qu'à toute fonction $\otimes \in L''$ correspond un système de trois v. a. positives U, V, W , dont les lois marginales sont :

$$\exp(-\frac{1}{u}) ; \quad \exp(-\frac{1}{v}) ; \quad \exp(-\frac{1}{w})$$

THEOREME 75 -

Pour qu'une f. d. r. $\otimes(u, v, w)$ appartienne à L'' il faut et il suf-

fit que $\text{Log } \Theta(u, v, w)$ soit homogène de degré - 1 dans la région :

$$u > 0, \quad v > 0, \quad w > 0.$$

Démonstration.

Etant donné une fonction $\Theta \in L''$, posons :

$$g(u, v, w) = \text{Log } \Theta(u, v, w)$$

quel que soit l'entier positif p , on a :

$$g(pu, pv, pw) = \frac{1}{p} g(u, v, w)$$

On en déduit que, p et q étant deux entiers > 0 arbitraires :

$$g\left(\frac{p}{q}u, \frac{p}{q}v, \frac{p}{q}w\right) = \frac{q}{p} g(u, v, w)$$

La condition d'homogénéité :

$$g(\lambda u, \lambda v, \lambda w) = \frac{1}{\lambda} g(u, v, w)$$

est donc satisfaite pour les valeurs rationnelles de λ . Par continuité, elle est satisfaite quel que soit λ .

Réciproquement, si une f. d. r. propre Θ vérifie cette condition, elle vérifie à fortiori l'équation (22), et ainsi appartient à L'' .

THEOREME 76 -

Si une fonction $\Theta(u, v, w)$ appartient à L'' , la f. d. r. $\psi(x, y, z)$ des trois variables : $X = U^{\frac{1}{\mu}}$; $Y = -V^{\frac{1}{\nu}}$; $Z = \text{Log } W$ appartient à L' .

Démonstration.

On voit d'abord que les lois marginales de ψ sont respectivement : Φ_μ , Ψ_ν , et Λ . La fonction $\psi(x, y, z)$ est donc une loi propre. Dans la région $x > 0$, $y < 0$, on a :

$$\psi(x, y, z) = \Theta[x^\mu, (-y)^\nu, e^z]$$

p étant un entier positif quelconque, l'identité de définition de Θ s'écrit alors :

$$\Theta^p[p x^\mu, p(-y)^\nu, p e^z] = \psi(x, y, z)$$

d'où :

$$\psi^p(p^{\frac{1}{p}}x, p^{\frac{1}{p}}y, z + \text{Log } p) = \psi(x, y, z)$$

Cette relation est bien de la forme (21), et par suite ψ appartient bien à L^1 .

Corollaire 76.

La famille L est constituée par les f. d. r. de même type que celles que l'on déduit de L^1 en effectuant sur chacune des variables U, V, W l'une des transformations :

$$U = X^\mu ; \quad U = (-X)^{-\nu} ; \quad U = \exp(X)$$

où μ et ν sont des constantes positives.

Ce corollaire est une conséquence directe de l'étude précédente, et sa généralisation à un nombre quelconque de variables est immédiate.

VII - CONSTRUCTION EFFECTIVE DES FONCTIONS DE L^2 AYANT UNE DENSITÉ -

a) D'après le corollaire 76, l'ensemble de ces fonctions se déduit par les transformations indiquées du sous-ensemble Ω constitué des f. d. r. $\Theta(x, y)$ possédant les propriétés suivantes :

1/ - Les variables X et Y sont positives, de lois marginales $e^{-\frac{1}{x}}$ et $e^{-\frac{1}{y}}$.

2/ - La fonction $\log \Theta(x, y)$ est homogène en x et y , de degré -1 .

3/ - La fonction $\Theta(x, y)$ a une densité $\Theta''_{x,y}$.

b) On peut toujours écrire une fonction $\Theta \in \Omega$ sous la forme

$$\Theta(x, y) = \exp \left(-\frac{1}{y} \left[\varphi \left(\frac{y}{x} \right) + 1 \right] \right)$$

Cherchons alors les conditions que doit vérifier la fonction $\varphi(t)$.

1/ - Densité.

La densité $\Theta''_{x,y}$ existe si et seulement si $\varphi'(t)$ et $\varphi''(t)$ existent pour $t > 0$. ($t = y/x$). Dans ce cas :

$$x^4 t^2 \Theta''_{x,y} = \{ x t^2 \varphi''(t) + \varphi'(t) [\varphi(t) - t \varphi'(t) + 1] \} \Theta(x, y)$$

Cette densité $\Theta''_{x,y}$ doit être essentiellement positive. Or, le crochet qui figure au second membre est de la forme : $ax + b$; pour que cette expression soit positive quand x varie de 0 à $+\infty$, a et b restant fixes, il faut et il suffit que a et b soient positifs. D'où les deux conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi''(t) > 0 \text{ pour } t > 0 \quad (C_1) \\ \varphi'(t) [\varphi(t) - t \varphi'(t) + 1] > 0 \text{ pour } t > 0 \quad (C_2) \end{array} \right.$$

2/ - Lois marginales.

On a les deux conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} [\varphi(\frac{y}{x}) + 1] = \frac{1}{y} \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} [\varphi(\frac{y}{x}) + 1] = \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

On voit aisément qu'elles sont respectivement équivalentes à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(t) \rightarrow 0 \text{ avec } t \quad (C_3) \\ \varphi(t) \sim t \text{ quand } t \rightarrow +\infty \quad (C_4) \end{array} \right.$$

Toute fonction $\varphi(t)$ vérifiant les conditions $C_1 \dots C_4$ répond à la question.

D'après C_1 , $\varphi(t)$ est convexe, $\varphi'(t)$ est monotone croissante. Donc $\varphi'(t)$ a une limite (finie ou infinie) quand $t \rightarrow +\infty$ et, d'après la règle de l'Hospital :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'(t)$$

Compte tenu de C_1 , C_4 est donc équivalente à :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'(t) = 1 \quad (C')$$

Pour étudier C_2 , nous distinguerons deux cas :

$\alpha) \varphi'(0) < 0$ La fonction $\varphi'(t)$ est croissante et tend vers 1 quand $t \rightarrow +\infty$. Il existe alors un nombre $r > 0$ tel que :

$$\varphi'(t) < 0 \text{ pour } t < r$$

$$\varphi'(t) > 0 \text{ pour } t > r$$

La fonction $\psi(t) = \varphi(t) - t \varphi'(t) + 1$ doit être telle que :

$$\psi(t) > 0 \text{ pour } t > r ;$$

or $\psi(t)$ est décroissante car sa dérivée est :

$$\psi'(t) = -t \varphi''(t) < 0.$$

On aura donc, à fortiori :

$$\psi(t) > 0 \text{ pour } t < r$$

et C_2 ne sera pas vérifiée dans l'intervalle $(0, r)$.

β) $\varphi'(0) > 0$ Dans ce cas, on a constamment $\varphi'(t) \geq 0$, et C_2 s'écrit : $\psi(t) > 0$. Puisque cette fonction est décroissante, il faut et il suffit que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) - t \varphi'(t) + 1 \geq 0$$

Cela revient à dire que l'ordonnée à l'origine $\varphi(t) - t \varphi'(t)$ de la tangente à la courbe : $\zeta = \varphi(t)$ admet une limite finie supérieure à -1 quand le point de contact s'éloigne indéfiniment. Comme $\varphi(0) = 0$, cette limite sera comprise entre 0 et -1 .

En résumé :

Pour qu'une fonction $\varphi(t)$ convienne, il faut et il suffit :

- que $\varphi'(t)$ et $\varphi''(t)$ existent pour $t > 0$
- que $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) \geq 0$, $\varphi''(t) \geq 0$
- que la courbe $\zeta = \varphi(t)$ ait une asymptote $\zeta = t + a$ avec :
 $-1 \leq a \leq 0$.

Exemples.

1/ - En prenant $\varphi(t) = t$, on obtient le cas de l'indépendance :

$$\Theta(x, y) = \exp(-\frac{1}{x}) \cdot \exp(-\frac{1}{y}).$$

Il est assez curieux de constater que la courbe $\zeta = t$ correspondante est au-dessus de toutes les autres.

2/ - En prenant comme courbe $\zeta = \varphi(t)$ un arc d'hyperbole équilatère tangent en O à Ox , on obtient :

$$\Theta(x, y) = e^{-\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{xy}}$$

VIII - REMARQUES DIVERSES -

1/ - Dans l'hypothèse $k = 1$, si Y_n a une loi limite, Y_n^a a aussi une loi limite, que R. Fisher appelle la forme "pénultième" ; sa détermination à partir de la limite de Y_n est très simple.

Les lois limites pour les plus petites valeurs se déduisent des précédentes par le changement de variable $X' = -X$ déjà utilisé au ch. I.

2/ - Supposons qu'il existe des constantes $a_n > 0$, b_n et c_n telles que les variables :

$$U_n = a_n Y_n + b_n, \quad V_n = a_n Z_n + c_n$$

convergent légalement. Posons :

$$S_n = a_n M_n + \frac{1}{2}(b_n + c_n)$$

$$T_n = a_n R_n + (b_n - c_n)$$

L'indépendance asymptotique stricte presque complète de Y_n et Z_n s'étend évidemment à U_n et V_n . Il en résulte :

- que S_n et T_n convergent légalement ;

- que leurs limites peuvent se calculer directement à partir des limites U et V de U_n et V_n , les variables U et V étant indépendantes.

On obtiendrait de la même façon les lois limites de $M_n^{\alpha, \beta}$ et de $R_n^{\alpha, \beta}$ à partir des lois limites de $Y_n^{\alpha, \beta}$ et $Z_n^{\alpha, \beta}$. Les résultats de ces calculs sont d'ailleurs bien connus (par exemple, on les trouvera dans certains articles de Gumbel mentionnés à la fin de ce travail).

CHAPITRE VII

PROPRIÉTÉS DES ÉCHANTILLONS A DEUX DIMENSIONS

I - UN THEOREME D'INDEPENDANCE LIMITE -

THEOREME 77 -

Etant donné une f. d. r. $F(x, y)$, supposons qu'il existe un point (x_0, y_0) tel que :

$$F(x_0, y_0) = 1 \quad ; \quad F(x, y) < 1 \quad \text{pour} \quad x < x_0 \quad \text{ou} \quad y < y_0$$

$$(x_0 \leq +\infty, y_0 \leq +\infty)$$

Soit $\bar{X}_n$ et $\bar{Y}_n$ la plus grande abscisse et la plus grande ordonnée d'un échantillon de n points indépendants $M_1, \dots, M_n$ de loi $F(x, y)$.

Pour que $\bar{X}_n$ et $\bar{Y}_n$ soient asymptotiquement globalement indépendants (fortement), il suffit que :

$$(C) \quad \lim_{x=x_0, y=y_0} \left[\frac{1 + F(x, y) - F(x, y_0) - F(x_0, y)}{1 - F(x, y)} \right] = 0$$

Démonstration.

Des parallèles aux axes de coordonnées menées par le point $M(x, y)$ découpent le plan en quatre régions, de probabilités respectives :

$$p = 1 - q = F(x, y)$$

$$a = F(x_0, y) - F(x, y) \quad ; \quad b = F(x, y_0) - F(x, y)$$

$$c = 1 - (p + a + b) = 1 + F(x, y) - F(x, y_0) - F(x_0, y)$$

La condition (C) peut s'écrire :

$$c/q \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad x \rightarrow x_0 \quad \text{et} \quad y \rightarrow y_0$$

$$\text{ou encore : } c/(a + b) \rightarrow 0 \quad \quad \quad " \quad \quad \quad "$$

En vertu des hypothèses faites sur $F(x, y)$, les trois quantités a , b , et c tendent vers 0 quand $x \rightarrow x_0$ et $y \rightarrow y_0$.

On a d'ailleurs :

$$\lim_{x=x_0} \left\{ \frac{c(x, y)}{a(x, y)} \right\} = 0 \quad \text{pour } y \leq y_1 < y_0$$

$$\text{et : } \lim_{x=x_0} \left\{ \frac{c(x, y)}{b(x, y)} \right\} = 0 \quad \text{pour } x \leq x_1 < x_0$$

Cela montre que la condition (C) doit être assez souvent vérifiée. La f. d. r. du couple $(\bar{X}_n, \bar{Y}_n)$ est : $F^n(x, y) = p^n$

Les lois marginales de $\bar{X}_n$ et $\bar{Y}_n$ sont :

$$F^n(x, y_0) = (p + a)^n \quad ; \quad F^n(x_0, y) = (p + b)^n$$

Pour qu'il y ait indépendance as. globale de $\bar{X}_n$ et $\bar{Y}_n$, il suffit que l'on ait :

$$(C_1) \quad p^n - (p + a)^n (p + b)^n \xrightarrow[n]{u} 0 \quad \text{avec } 1/n$$

Choisissons deux constantes $x_1 < x_0$ et $y_1 < y_0$. Il est clair que, dans toute région : $(x \leq x_1) \cup (y \leq y_1)$ la condition (C_1) est vérifiée. Il nous suffira donc de montrer qu'elle est satisfaite dans une région :

$$x_1 < x < x_0 \quad ; \quad y_1 < y < y_0$$

où x_1 et y_1 peuvent être choisis arbitrairement voisins de x_0 et y_0 . Posons :

$$\begin{aligned} d &= p^n - (p + a)^n (p + b)^n \\ &= (1 - q)^n - [(1 - b - c)(1 - a - c)]^n \\ &= (1 - q)^n - (1 - q + cq - c + ab)^n \\ &= (1 - q)^n - (1 - kq)^n \end{aligned}$$

$$\text{avec : } k = 1 - c + \frac{c - ab}{q}$$

D'après (C), $c/q \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow x_0$ et $y \rightarrow y_0$.

De plus :

$$ab/q < \frac{ab}{a + b} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \rightarrow 0 \quad \text{quand } x \rightarrow x_0, \quad y \rightarrow y_0$$

Par suite, $k \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow x_0$ et $y \rightarrow y_0$.

h étant un nombre positif arbitrairement petit, il lui correspondra donc deux nombres $x_1 < x_0$, $y_1 < y_0$ tels que :

$$1 - h < k < 1 + h \text{ pour } x > x_1, y > y_1 \text{ (région R)}$$

La fonction d croissant avec k , on peut écrire dans R :

$$(1 - q)^n - [1 - (1 - h)q]^n < d < (1 - q)^n - [1 - (1 + h)q]^n$$

et, à fortiori :

$$(1 - q)^n - \frac{1}{1 - h} [1 - (1 - h)q]^n < d < (1 + h)(1 - q)^n - [1 - (1 + h)q]^n$$

Considérons la fonction :

$$f(q) = (1 - q)^n - \frac{1}{1 - h} [1 - (1 - h)q]^n$$

Sa dérivée est donnée par :

$$\frac{1}{n} f'(q) = [1 - (1 - h)q]^{n-1} - (1 - q)^{n-1}$$

Elle est positive quand q est positif ; le maximum de $f(q)$ est donc atteint pour $q = 0$:

$$\alpha = 1 - \frac{1}{1 - h} = \frac{-h}{1 - h} > -2h$$

Considérons maintenant la fonction :

$$g(q) = (1 + h)(1 - q)^n - [1 - (1 + h)q]^n$$

Sa dérivée, donnée par :

$$\frac{1}{n(1 + h)} g'(q) = -(1 - q)^{n-1} + [1 - (1 + h)q]^{n-1}$$

est négative pour $q > 0$; le maximum de $g(q)$ est donc atteint pour $q = 0$:

$$\beta = h$$

Ainsi l'on a dans R :

$$-2h < d < h$$

D'autre part, on pourra toujours associer aux nombres h , x_1 , y_1 , un entier N tel que : $n > N$ entraîne :

$$|d| < h \text{ pour } (x \leq x_1) \cup (y \leq y_1)$$

On aura donc, dans tout le plan $|d| < 1$ h pour $n > N$ et, par suite

$$d \rightarrow 0 \text{ avec } 1/n \quad c \in Q \cap Y \cap D$$

II - APPLICATION A LA LOI DE LAPLACE-GAUSS -

THEOREME 78 -

Les plus grandes valeurs X , Y des marges d'une densité de Laplace-Gauss à deux dimensions sont asymptotiquement globalement indépendantes (loinément).

Démonstration.

Il est toujours possible de supposer que la loi est réduite. Sa densité de probabilité est alors :

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-r^2}} \exp \left[-\frac{x^2 - 2rxy + y^2}{2(1-r^2)} \right]$$

En appelant D le domaine $X > x$, $Y > y$, on a :

$$c = \iint_{D} f(x, y) dx dy$$

Considéré comme fonction de x , le trinôme $T(x, y) = x^2 - 2rxy + y^2$ est minimum pour $x = ry$. On a donc :

$$x^2 - 2rxy + y^2 > (1-r^2)y^2$$

$$\text{De même} \quad x^2 - 2rxy + y^2 > (1-r^2)x^2$$

On en déduit :

$$x^2 - 2rxy + y^2 < \frac{1-r^2}{2} (x^2 + y^2)$$

et par suite :

$$\begin{aligned} 2\pi \sqrt{1-r^2} c &< \iint_{D} \exp \left[-\frac{1}{4}(x^2 + y^2) \right] dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{x^2}{4} \right) dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{y^2}{4} \right) dy \end{aligned}$$

$$\text{Or :} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{x^2}{4} \right) dx < \frac{2}{x} \exp \left(-\frac{x^2}{4} \right)$$

$$\text{On a donc :} \quad c < \frac{1}{\sqrt{1-r^2} xy} \exp \left[-\frac{1}{4}(x^2 + y^2) \right]$$

D'autre part :

$$b + c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi} x} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

et de même : $a + c \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi} x} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$

Il résulte des relations précédentes :

$$\frac{a+b+2c}{c} > \sqrt{\frac{1-r^2}{2\pi}} \left(y \exp\left[-\frac{1}{4}(x^2 - y^2)\right] + x \exp\left[\frac{1}{4}(x^2 - y^2)\right] \right)$$

L'une des deux exponentielles figurant dans l'inégalité ci-dessus est ≥ 1 , donc le second membre croît indéfiniment quand $x \rightarrow +\infty$ et $y \rightarrow +\infty$. Cela entraîne :

$$\lim. \frac{c}{a+b+c} = 0 \text{ pour } x \rightarrow +\infty \text{ et } y \rightarrow +\infty \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Corollaire 79.

La loi limite du couple $(\bar{X}_n, \bar{Y}_n)$ formé par les plus grandes valeurs des marges d'un échantillon normal à deux dimensions est du type :

$$\Phi(x, y) = \exp(-e^{-x}) \exp(-e^{-y})$$

C'est une conséquence immédiate du théorème 79, compte tenu du fait que la loi limite de $\bar{X}_n$ est du type $\exp(-e^{-x})$.

III - LOCALISATION ASYMPTOTIQUE PRESQUE SURE DU "POLY-GONE D'APPUI" D'UN ECHANTILLON NORMAL BIDIMENSIONNEL -

1/ - Soit $M_1, M_2, \dots, M_n$ un échantillon d'une loi normale à deux dimensions. Nous appelons "polygone d'appui" de cet échantillon le plus petit polygone convexe contenant tous ses points.

Nous allons voir qu'il est possible de localiser (asymptotiquement) presque sûrement ce polygone aléatoire entre deux ellipses homothétiques dont l'écart maximum tend vers 0 quand la taille de l'échantillon croît indéfiniment.

2/ - Moyennant une affinité, on peut toujours se ramener au cas où les deux variables X, Y sont indépendantes et ont pour écart-type $1/\sqrt{2}$. La densité est alors :

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \exp [-(x^2 + y^2)]$$

Si l'on effectue le changement de variables :

$$Z = OM = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\theta = (\vec{OX}, \vec{OM}) \quad (0 < \theta < 2\pi)$$

les deux variables Z et θ que l'on obtient sont indépendantes. θ est répartie uniformément entre 0 et 2π , tandis que :

$$F_z(z) = 1 - e^{-z^2}$$

3/ - En se reportant au théorème 53 (ch. 4), on verrait aisément que $F(z) \in \mathcal{K}$, c'est-à-dire que les plus grandes valeurs d'un échantillon $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ sont stables presque sûrement. Elles se concentrent au voisinage de :

$$a_n = G^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = (\text{Log } n)^{\frac{1}{2}}$$

Appelons $\bar{Z}_n^1, \bar{Z}_n^2, \dots, \bar{Z}_n^k, \dots$ les valeurs de l'échantillon ordonnées de la droite vers la gauche.

Nous allons d'abord déterminer une suite certaine ϵ_n telle que :

$$a_n - \epsilon_n < \bar{Z}_n^1 < a_n + \epsilon_n \quad \text{et} \quad \epsilon_n \longrightarrow 0 \quad \text{avec} \quad 1/n$$

a) La condition :

$$\bar{Z}_n^1 < a_n + \epsilon_n$$

équivalent, d'après le théorème 6, à :

$$\sum G(a_n + \epsilon_n) < \infty$$

$$\text{c'est-à-dire :} \quad \sum \exp [- (\sqrt{\text{Log } n} + \epsilon_n)^2] < \infty$$

Cette condition est satisfaite par :

$$\epsilon_n = (\text{Log } n)^{-\frac{1}{2}} \text{Log Log } n$$

car on a alors :

$$\exp [- (\sqrt{\text{Log } n} + \epsilon_n)^2] \sim \exp (- \text{Log } n - 2 \text{Log Log } n) = \frac{1}{n \text{Log}^2 n}$$

b) La condition :

$$a_n - \varepsilon_n < \underset{p.s.}{<} \bar{Z}_n^1$$

est conséquence de : $a_n - \varepsilon_n < \underset{p.c.o.}{<} \bar{Z}_n^1$

Or, cette dernière condition équivaut à :

$$\sum F^n(a_n - \varepsilon_n) < \infty$$

Posons $u_n = F^n(a_n - \varepsilon_n)$; il vient :

$$\begin{aligned} \text{Log } u_n &= n \text{ Log } \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\sqrt{\text{Log } n} - \frac{\text{Log Log } n}{\sqrt{\text{Log } n}} \right)^2 \right] \right\} \\ &< -n \exp [-\text{Log } n + 2 \text{ Log Log } n - (\text{Log } n)^{-1} \text{Log Log}^2 n] \\ &< -n \exp [-\text{Log } n + 2 \text{ Log Log } n] = -(\text{Log } n)^2 \end{aligned}$$

Donc : $u_n < \exp(-\text{Log}^2 n) = n^{-\text{Log } n}$

et par suite : $\sum u_n < \infty$

4/ - Nous allons maintenant chercher une suite d'entiers k_n croissant indéfiniment avec n , et telle que :

$$a_n - \varepsilon_n < \underset{p.c.o.}{<} \bar{Z}_n^{k_n} \quad (1)$$

Pour cela, reprenons l'étude faite lors de la démonstration du théorème 12. A présent, l'indice α est variable, et le second membre de la formule 4 (p. 16) sera équivalent à son premier terme si :

$$\begin{aligned} \frac{n G(a_n - \varepsilon_n)}{k_n} &\longrightarrow \infty \text{ avec } n, \text{ c'est-à-dire si :} \\ (\text{Log } n)^2 / k_n &\longrightarrow \infty \end{aligned} \quad (2)$$

Supposons cette condition réalisée, et considérons le rapport :

$$\rho_n = \frac{n(n-1) \dots (n-k_n+2)}{n^{k_n-1}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k_n-2}{n}\right)$$

On a :

$$(k_n - 2) \text{Log} \left(1 - \frac{k_n - 2}{n}\right) < \text{Log } \rho_n < (k_n - 2) \text{Log} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Or, si (2) est vraie, k_n/n et k_n^2/n tendent vers 0 avec $1/n$ et par suite $\text{Log } \rho_n \longrightarrow 0$, donc $\rho_n \longrightarrow 1$.

En fin de compte :

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k_n+2)}{(k_n-1)!} F^{n-k_n+1}(a_n - \epsilon_n) G^{k_n-1}(a_n - \epsilon_n) \\ < F^n(a_n - \epsilon_n) [nG(a_n - \epsilon_n)]^{k_n-1} = w_n$$

La convergence de la série (w_n) entraînera la condition (1) si la condition (2) est satisfaite. On aurait alors :

$$\begin{aligned} \text{Log } w_n &< -\exp \left[2 \text{Log Log } n - \frac{(\text{Log Log } n)^2}{\text{Log } n} \right] + (k_n - 1) \left[2 \text{Log Log } n \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\text{Log Log } n)^2}{\text{Log } n} \right] \\ &< -\exp \left[2 \text{Log Log } n - \frac{\text{Log Log}^2 n}{\text{Log } n} \right] + 2 k_n \text{Log Log } n \\ &\sim -\text{Log}^2 n + 2 k_n \text{Log Log } n \end{aligned}$$

Si l'on prend :

$$k_n = \frac{1}{3} \text{Log}^2 n / \text{Log Log } n, \text{ on a :}$$

$$\text{Log } w_n < -\frac{1}{4} \text{Log}^2 n, \text{ donc } \sum w_n < \infty$$

De plus, la condition (2) est bien vérifiée par cette valeur de k_n .

5/ - Les résultats déjà obtenus peuvent s'exprimer ainsi :

- Tous les points $M_1, M_2, \dots, M_n$ de l'échantillon sont asymptotiquement presque sûrement intérieurs à un cercle Γ_n de centre O , de rayon :

$$R_n = (\text{Log } n)^{\frac{1}{2}} + (\text{Log } n)^{-\frac{1}{2}} \text{Log Log } n$$

- Le nombre $N(n)$ de ces points appartenant à la couronne limitée par Γ_n et Γ'_n (cercle de centre O , rayon $R'_n = \sqrt{\text{Log } n} - \frac{\text{Log Log } n}{\sqrt{\text{Log } n}}$) est asymptotiquement presque complètement supérieur à :

$$\frac{1}{3} \text{Log}^2 n / \text{Log Log } n.$$

Il nous reste à étudier la répartition des N points à l'intérieur de la couronne.

6/ - Soit $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ les points de l'échantillon $\{M_i\}$ situés à l'extérieur de Γ'_n , et numérotés par ordre d'argument θ_i croissant. Appelons P_n le polygone $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$.

Partageons la région du plan extérieure à Γ'_n en v_n domaines égaux par des demi-droites $A_1 u_1, A_2 u_2, \dots$ dont les prolongements passent par 0, et limitées à Γ'_n .

Si l'on choisit :

$$v_n = [(\text{Log } n)^{\frac{2}{3}}], \text{ on a :}$$

$$A_1 A_2 \sim \frac{1}{2} A_1 A_3 \sim 2\pi (\text{Log } n)^{-\frac{1}{6}}$$

La corde $\alpha\beta$ obtenue en joignant deux points pris dans la réunion de deux régions consécutives $u_1 A_1 A_2 u_2$ et $u_2 A_2 A_3 u_3$ sera nécessairement intérieure au domaine limité par les droites $A_1 u_1, A_1 A_3, A_3 u_3$. Or, la distance d_n de O à $A_1 A_3$ est telle que :

$$R'_n - d_n \sim 2\pi^2 (\text{Log } n)^{-\frac{5}{6}} < (\text{Log } n)^{-\frac{1}{2}} \text{Log Log } n$$

Par conséquent, si le polygone P_n a au moins un sommet dans chacune des régions $u_i A_i A_{i+1} u_{i+1}$ (hypothèse H), il sera extérieur au cercle Γ''_n , de centre O, et de rayon :

$$R''_n = (\text{Log } n)^{\frac{1}{2}} - 2 \text{Log Log } n (\text{Log } n)^{-\frac{1}{2}}$$

7/ - Montrons que l'hypothèse H est presque complètement sûrement réalisée pour n assez grand.

Supposons que :

$$N = k_n = \frac{1}{3} (\text{Log } n)^2 (\text{Log Log } n)^{-1}$$

La probabilité pour qu'un point μ_i tombe dans une région déterminée $u_j A_j A_{j+1} u_{j+1}$ est : $1/v_n$.

Donc la probabilité pour que, au cours de k_n épreuves, les points μ_i ne tombent jamais dans cette région est :

$$\left(1 - \frac{1}{v_n}\right)^{k_n}$$

Enfin, la probabilité ϖ_n pour qu'il existe une région quelconque du type précédent dans laquelle ne tombe aucun point pendant les k_n épreuves est telle que :

$$\varpi_n < v_n \left(1 - \frac{1}{v_n}\right)^{k_n}$$

Or :

$$\begin{aligned} \text{Log } \varpi_n &\sim \frac{2}{3} \text{Log Log } n + \frac{1}{3} \text{Log}^2 n (\text{Log Log } n)^{-1} \text{Log} [1 - (\text{Log } n)^{-\frac{2}{3}}] \\ &\sim -\frac{1}{3} (\text{Log } n)^{\frac{4}{3}} (\text{Log Log } n)^{-1} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\sum \omega_n < \infty$$

Compte tenu du fait que :

$$N_{p.c.o.} > k_n$$

on voit alors que l'hypothèse H est presque complètement sûrement réalisée pour n suffisamment grand.

8/ - En résumé, on a :

$$P_n \subset \Gamma_n \quad \text{as. presque sûrement}$$

$$\text{et :} \quad \Gamma_n'' \subset P_n \quad \text{as. presque complètement.}$$

Le polygone d'appui Ω_n de l'échantillon $\{M_i\}$ contenant aussi le polygone d'appui de P_n , on a finalement les relations asymptotiques :

$$\Gamma_n'' \underset{p.c.o.}{\subset} \Omega_n \underset{p.s.}{\subset} \Gamma_n$$

BIBLIOGRAPHIE

- CRAMER H. - Mathematical methods of Statistics, p.371, Princeton, 1946-
- DODD E. L. - The greatest and the least variate under general laws of error. (Trans. of the Am. Math. Soc., vol. 25, N° 4 - pp. 525-539, New-York 1928)-.
- DUGUE D. - [1] Eléments limites stochastiques (Bull. Inst. Intern. Statist., tome XXXIV, 2° livraison, 1954).
- [2] Sur la convergence stochastique au sens de Cesaro et sur des différences importantes entre la convergence presque certaine et les convergences en probabilité et presque complète (Sankhya, Vol. 18, parts 1 and 2, May 1957, pp. 127-138).
- Traité de statistique théorique et appliquée (1er fasc. : Analyse aléatoire) Masson éditeur, 1958.
- ELFVING G. - The asymptotical distribution of range in samples from a normal population (Biometrika, Vol. XXXIV, parts I and II, Janv. 1947).

- DE FINETTI B. - Sulla legge di probabilita degli estremi (metron , IX, 3-4, 1931).
- FISHER R. A. et TIPPETT L. H. C. - Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample (Proc. Cam. Phil. Soc. , vol. 24 ; part 2, pp. 180-190 - 1926).
- FRECHET M. - [1] Eléments aléatoires (Monographies des Probabilités, Gauthier-Villars éd.).
- [2] Sur la loi de probabilité de l'écart maximum (Annales de la Soc. polonaise de Math. Vol. 6, pp. 93-116, Cracovie 1927).
- GNEDENKO B. V. - Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire (Ann. Math. vol. 44, p. 423).
- GREENWOOD J. A. - Distribution of the m^{th} range (Ann. Math. Stat. , vol. 26 p. 772, 1955).
- GUMBEL E. J. - Les valeurs extrêmes des distributions statistiques (Ann. I. H. P. 1935).
- Ranges and midranges (Ann. Math. Stat. Vol. XV, p. 414, 1944)
- The distribution of the range (Ann. Math. Stat. , Vol. XVIII, p. 384 , 1947).
- Statistical theory of extreme value and some practical applications (Nat. Bur. of Standards, Appl. Math. series 33, Washington 1954).
- The maxima of the mean largest value and of the range (Ann. Math. Vol. XXV, p. 76).
- The m^{th} range (Columbia Univ. tech. report T-11A, June 1957)
- HARTLEY H. O. - The range in random samples (Biometrika, Vol. 32 , pp. 334-348 1942).
- HARTLEY H. O. et PEARSON E. S. - The probability integral of the range in samples of n observations from a normal population (Biometrika, Vol. 32 pp. 301-310, 1942).
- KENDALL M. G. - Note on the distribution of the quantiles for larges samples (Suppl. Journ. Roy. Stat. Soc. Vol. 7, p. 83, 1941).
- KHINTCHINE A. - Les lois limites des sommes de variables aléatoires indépendantes (Moscou 1938 ; en Russe).
- KIMBALL B. F. - Assignment of frequencies to a completely ordered set of data (Trans. Am. Geoph. Union, 27, 1946).
- The bias of certain estimates of the parameters of the extreme value distribution (Ann. Math. Stat. Vol. 27, 1956).
- LEVY P. - [1] Théorie de l'addition des variables aléatoires (Monographies des Probabilités, Gauthier-Villars, Editeur).

- Mac KAY A. T. et PEARSON E. S. - A note on the distribution of range in samples of n (Biometrika, Vol. 25, pp. 415-420, 1933).
- VON MISES R. - Über die Variationsbreite einer Beobachtungsreihe (Berliner Math. gesellschaft, t. 22, p. 3, 1923).
- La distribution de la plus grande de n valeurs (Rev. Math. de l'Union Interbalkanique, Vol. 1, N° 2, pp. 1-20, Athenes 1936).
- PEARSON E. S. - A further note on the distribution of range in samples taken from a normal population (biometrika, Vol. 18, pp. 173-194, 1926).
- The percentage limit for the distribution of range in samples from a normal population (Biometrika, Vol. 24, pp. 404-417, 1932).
- PEARSON E. S. et DAVIES O. L. - Methods of estimating from samples the population standard deviation (Journ. of the Royal Stat. Soc. Supp. 1 p. 76, 1934).
- PITMAN E. J. G. - Estimation of the location and scale parameters for a continuous population of any given form (Biometrika, Vol. 30 1939).
- Tests of hypothesis concerning location and scale parameters (Biometrika, Vol. 31, 1939-40).
- RIDER P. R. - The midrange of a sample as an estimation of the population midrange (Journ. Am. Stat. Ass. Dec. 1957, vol. 52, pp. 537-542).
- SALVEMINI T. - Suicampioni di una massa discreta equidistributa : il campo di variazione (Statistica, N°1, Anno XVIII, 1958).
- TIAGO DE OLIVEIRA J. - Estimators and tests for continuous populations with location and dispersion parameters (Rev. da Fac. Ciencias de Lisboa, 2° série, A, Vol. VI, Fasc. 1, pp. 121-146, 1957).
- TIPPET L. H. C. - On the individuals and the range of samples taken from a normal population (Biometrika, Vol. 17, pp. 364-87, 1925).
- WILKS S. S. - Order statistics (Bull. Am. Math. Soc., Vol. 54, N° 1, part I, pp. 6-50, 1948).

TABLE DES MATIERES

	Pages
INTRODUCTION	39
CHAPITRE I -	
Majorations et minorations asymptotiques des valeurs extrêmes d'un échantillon	41
CHAPITRE II -	
Etude de la stabilité en probabilité des valeurs extrêmes d'un échantillon	61
CHAPITRE III -	
Stabilité presque complète des valeurs extrêmes d'un échantillon	91
CHAPITRE IV -	
Stabilité presque sûre des valeurs extrêmes d'un échan- tillon	109
CHAPITRE V -	
Quelques considérations sur la notion d'indépendance li- mite de deux variables aléatoires, application à l'étude de la stabilité du milieu et de l'étendue d'un échantillon.	123
CHAPITRE VI -	
Etude de certaines lois limites	145
CHAPITRE VII -	
Propriétés des échantillons à deux dimensions	173

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

"LES TREILLIS EN TOPOLOGIE"

Vu et approuvé :

Paris, le 12 Décembre 1958

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

J. PERES

Vu

et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie

de Paris,

Jean SARRAILH

IMP. LOUIS-JEAN -- GAP (4:1)

